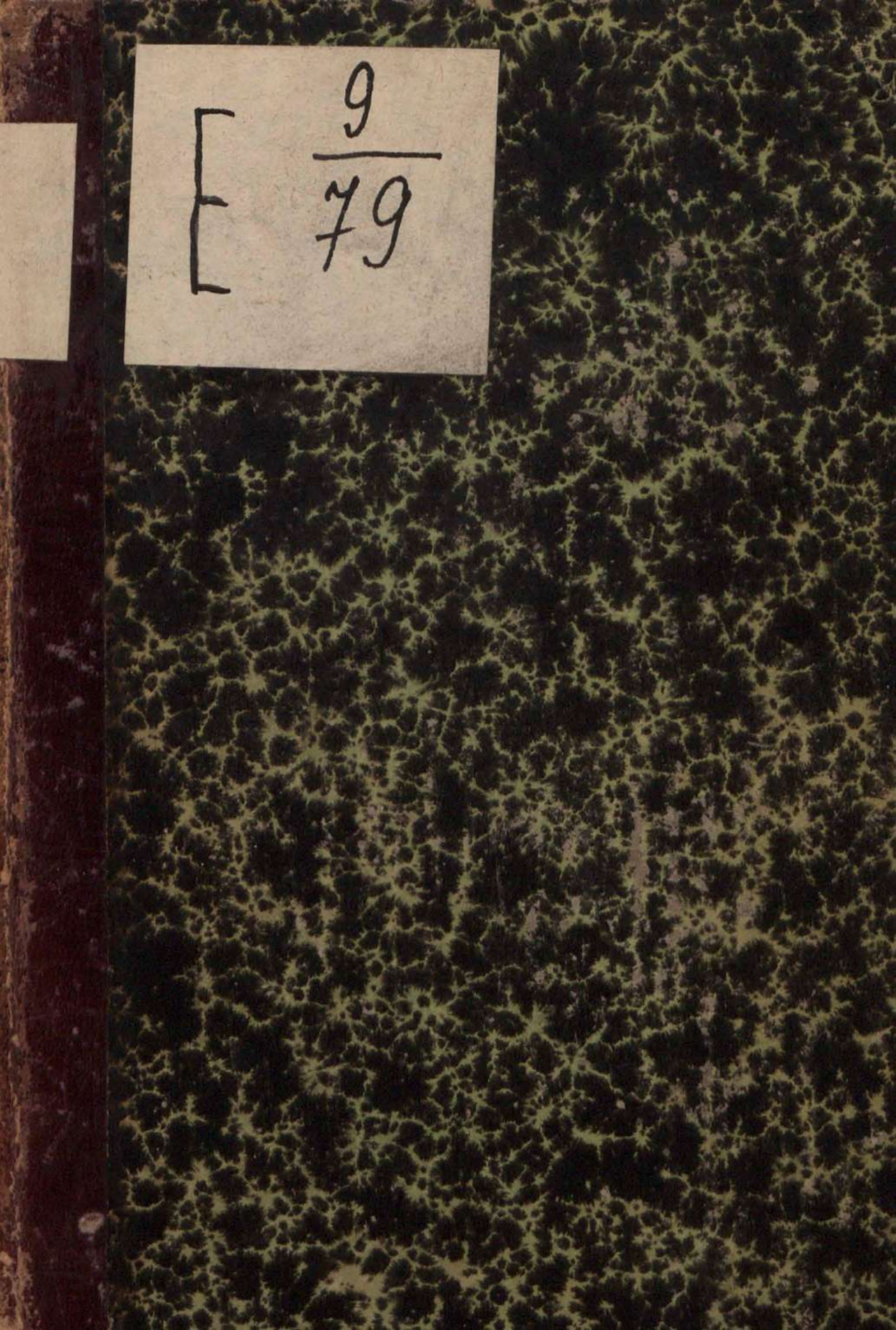
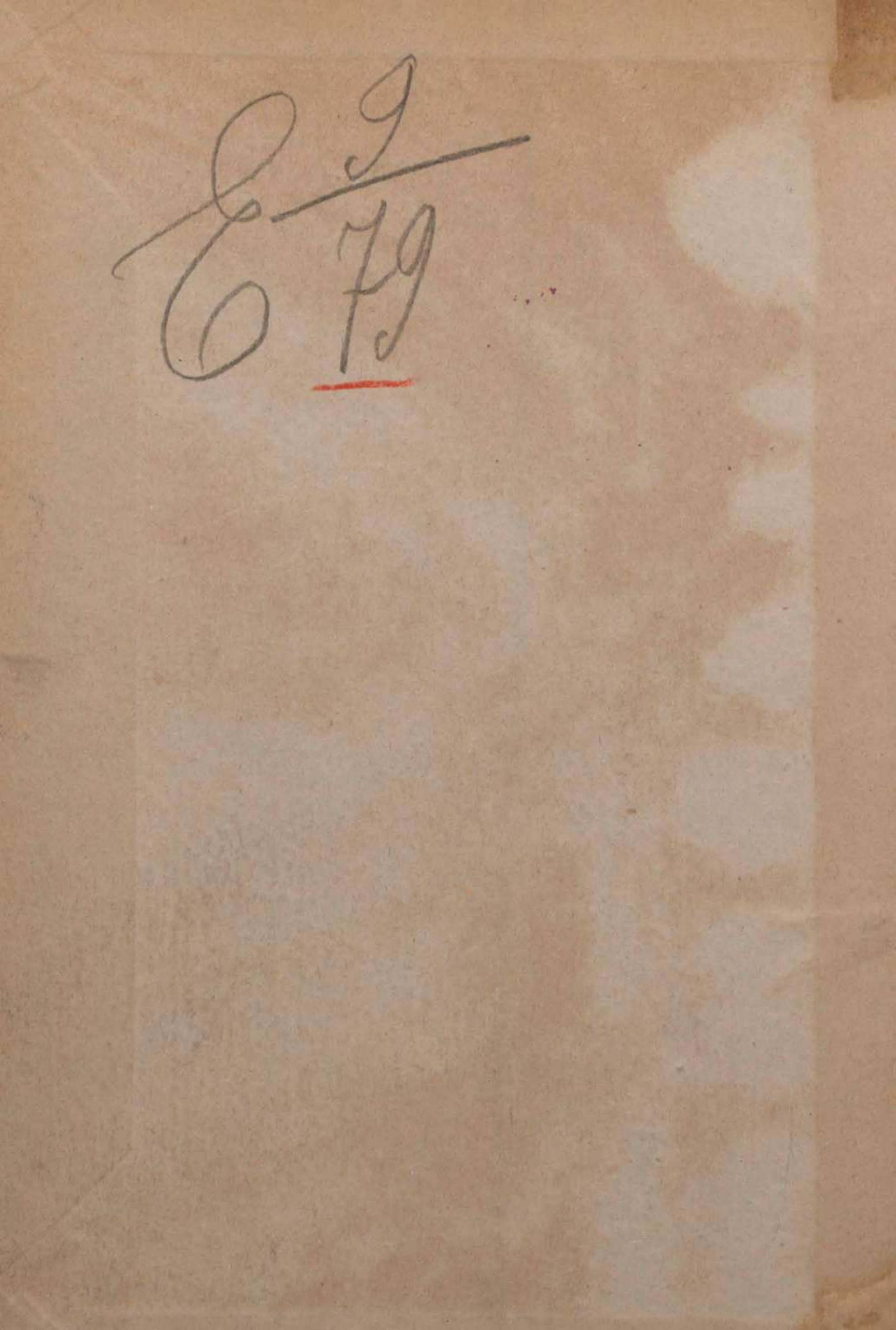
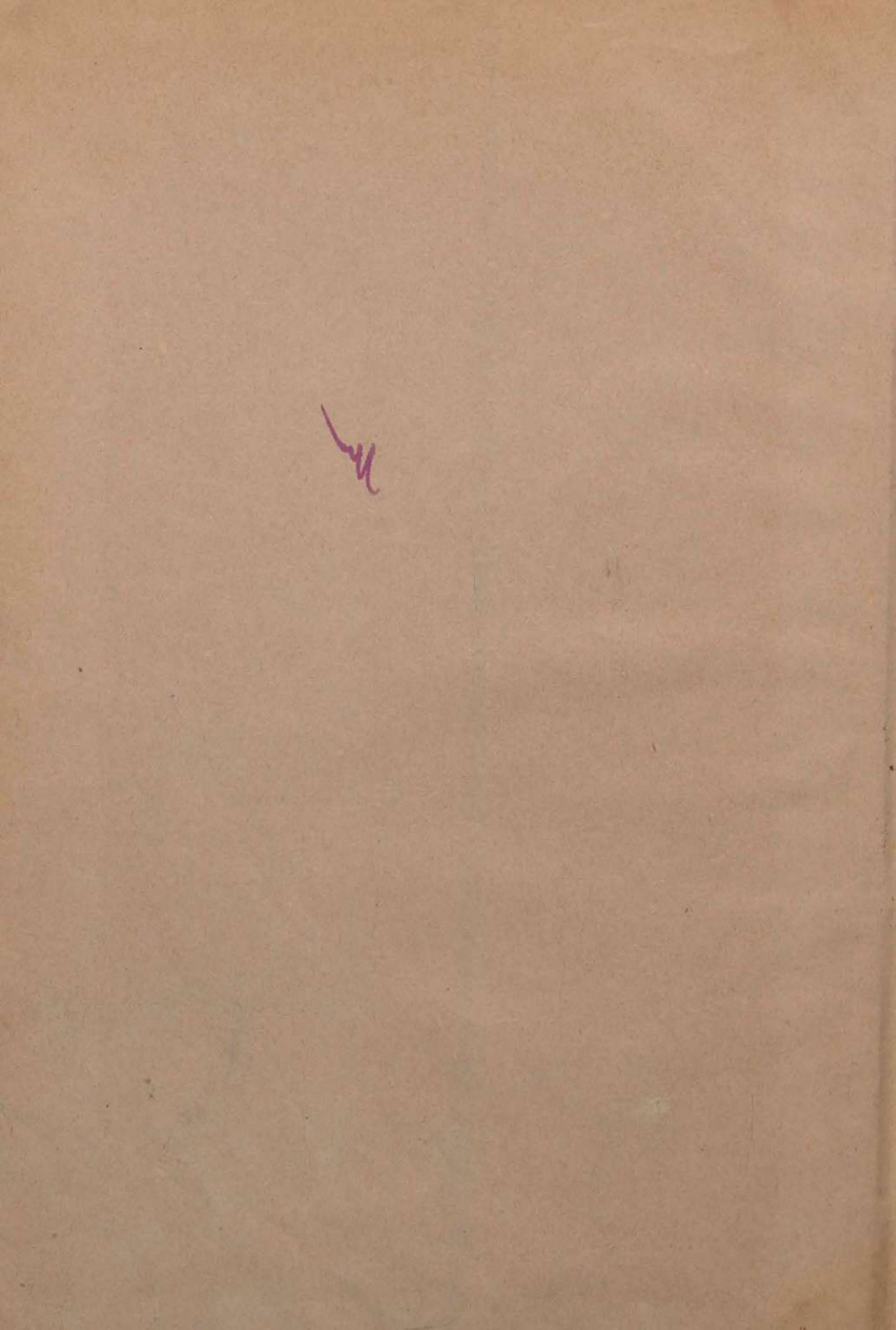
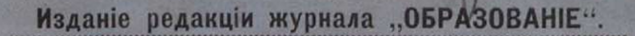

E 9/79





Изданіе редакціи журнала „ОБРАЗОВАНІЕ“.



ОЧЕРКИ

по

ФИЛОСОФІИ МАТЕМАТИКИ

Ш. Фрейсинэ.

ПЕРЕВОДЪ СЪ ФРАНЦУЗСКАГО.

2-е значительно исправленное изданіе.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Б. М. Вольфа. Разъѣзжая, д. № 15.
1902.

ИЗДАНІЯ РЕДАКЦІИ ЖУРНАЛА

„ОБРАЗОВАНІЕ“.

Счастье. Популярные очерки по нравств. философіи проф. К. Гильти. Пер. съ нѣм. А. Острогорскаго **5-е изд**. Ц. 50 к.

Что такое нравственность? Проф. Циглера. Пер. съ нѣм. А. Острогорскаго. **3-е изд**. Ц. 50 к.

Воображеніе и память. Ф. Кейра. Пер. съ франц. Е. Максимовой. **2-е изд**. Ц. 40 к.

Аффективная память. Т. Рибо. Пер. съ франц. Е. Максимовой. **2-е изданіе**. Ц. 25 к.

Этика и политическая экономія Проф. Ф. Іодля. Пер. съ нѣм. **2-е изд**. Ц. 20 к.

Объ утомленіи глаза. Д-ра мед. Р. Каца. **3-е** соверш. перераб. и значит. дополненное изд. Съ 10 рис. Ц. 50 к.

Исторія первобытнаго человѣчества. М. Гернеса. Пер. съ нѣм. съ пред. и прим. Н. Березина, съ 45 рис. **2-е изд**. Ц. 50 к.

Исторія человѣческой культуры. І. Гонеггера. Пер. М. Чепинской. Ц. 60 к.

Чарльзъ Дарвинъ, его жизнь и ученіе. Проф. Геффдинга. Пер. съ нѣм. Ц. 20. к. (съ портрет.).

Очерки по философіи математики. Ш. Фрейсинэ. Пер. съ франц. 2-е исправл. изд. Ц. 60 к.

Этюды по философіи наукъ. А. Лаланда. Пер. съ французск. **2-е изд**. Ц. 75 к.

Мозгъ и душа. Проф. Флексига. Пер. съ нѣм. съ табл. въ 7 красокъ. Ц. 40 к.

Гуманность въ исторіи человѣчества. В. Штальберга, пер. съ нѣм. Н. Леонтьевой. Ц. 80 к.

Исторія политическихъ ученій. Проф. Поллока, пер. съ англ. А. М. Гердъ. Ц. 50 к.

Денежное обращеніе и его общественное значеніе. М. Шиппеля пер. съ нѣм. подъ ред. и съ предисл. Петра Струве. Ц. 50 к.

О причинахъ явленій въ органическомъ мірѣ. Т. Гексли. Съ 13 рис. и портр., пер. съ англ. съ прил. біограф. очерка Т. Гексли, Н. Березина. Ц. 60 к.

Исторія французской литературы. XIX в., XVIII в. и XVII вѣкъ. Проф. Лансона. Пер. съ французск. подъ ред. П. О. Морозова. Цѣна кажд. вып. 1 р.

Статистика и наука объ обществѣ. Н. Рейхесберга. Пер. съ нѣм. А. Струве. Ц. 50 к.

Критика новѣйшихъ системъ морали. А. Фуллье. Пер. съ франц. О. Конради и Е. Максимовой. Цѣна 1 р. 50 к.

Очеркъ исторіи искусствъ. М. Брекера. Съ 46 рис. Пер. съ нѣмец. Н. Лемана. Ц 1 р. 50 к.

Очеркъ исторіи соціологіи проф. Л. Гумпловича, пер. съ польск. Ц. 40 к.

Очерки изъ исторіи нѣмецкой культуры. П. Кампфмейра. пер. съ нѣм. подъ ред. П. Струве. Ц. 60 к.

Популярные біологическіе очерки. Проф. В. Шимкевича съ 65 рис. и 4 портр. Ц. 1 р. 25 к.

Изданіе редакціи журнала „ОБРАЗОВАНІЕ“.

ОЧЕРКИ
ПО
ФИЛОСОФІИ МАТЕМАТИКИ

Ш. Фрейсинэ.

ПЕРЕВОДЪ СЪ ФРАНЦУЗСКАГО.

2-е значительно исправленное изданіе.



С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Б. М. Вольфа. Разъѣзжая, д. № 15.
1902.

Дозволено цензурою. С.-Петербургъ, 11 Марта 1902 года.



ОГЛАВЛЕНІЕ.

ПРЕДИСЛОВІЕ.

Науки не ограничиваются однимъ только расширеніемъ области нашихъ положительныхъ знаній. Онѣ, въ свою очередь, становятся предметомъ изученія для ума, который находитъ себѣ удовлетвореніе, извлекая изъ нихъ философскую мысль, изучая ихъ методы и пріемы, восходя къ ихъ началамъ, угадывая связь ихъ съ общими идеями, представляющими собою какъ бы общій источникъ, откуда черпаютъ свое содержаніе какъ самыя абстрактныя умозрѣнія, такъ и простѣйшія и наиболѣе употребительныя наблюденія. Прежде эта работа производилась, такъ сказать, естественно. Границы между различными вѣтвями знанія были гораздо менѣе рѣзко выражены, чѣмъ теперь. Одни и тѣ же люди являлись и геометрами, и физиками, и философами. Даже не обращаясь къ древнимъ, достаточно указать между новыми учеными на Галилея, Декарта, Ньютона, Лейбница, Паскаля, Эйлера. Самыя блестящія открытія не отвлекали ихъ взора отъ цѣлаго, и они испытывали чувство удовлетворенія, способствуя въ одно и то же время научному и философскому прогрессу.

Громадные размѣры, принятые въ теченіе послѣдняго столѣтія спеціальными науками, не допускаютъ болѣе универсальнаго знанія. Человѣческая жизнь слишкомъ коротка, и даже самые могучіе геніи должны выбирать между различными отраслями знанія. Амперъ, кажется, былъ послѣднимъ

изъ тѣхъ, кто пытался удержать въ своихъ рукахъ это множество нитей. Съ тѣхъ поръ уже нельзя назвать изобрѣтателя новаго вычисленія, который писалъ бы „Теодицею“ или „Разсужденіе о методѣ“, точно такъ же какъ нѣтъ другого творца „Электро-динамической теоріи“, составившаго „Общую классификацію наукъ“. Въ этомъ, мнѣ кажется, можно бы видѣть достаточное основаніе для того, чтобы профессіональные ученые, прерывая время отъ времени свои изслѣдованія, соглашались каждый въ отдѣльности, заняться синтезомъ любимой ими науки и группировкой существенныхъ ея результатовъ въ картину, которая могла бы остановить на себѣ всякій, сколько нибудь внимательный взглядъ. Обращаясь съ своимъ трудомъ къ широкому кругу интеллигенціи, они вызывали бы неожиданное сотрудничество, которое вѣрнѣе всего подготовляетъ распространеніе знаній. Кромѣ того они доставили бы метафизикѣ преимущество, къ которому она стремится,—наблюдать способности человѣка въ дѣйствіи и имѣть возможность судить достоинство методовъ по качеству полученныхъ результатовъ.

Съ своей стороны, я пробовалъ осуществить эту мысль относительно двухъ вѣтвей математики, которыми занимался въ молодости и съ которыми я никогда не терялъ совершенно связи. Анализъ безконечно малыхъ и Механика—о нихъ, именно, я хочу говорить—имѣютъ ту особенную заслугу, что они обращаютъ на себя вниманіе, я сказалъ бы даже, возбуждаютъ воображеніе, первый—нѣсколько таинственнымъ характеромъ своихъ основныхъ началъ, а вторая—своимъ приложеніемъ къ такимъ высокимъ задачамъ, какъ проблемы астрономіи. Каковы, въ сущности, эти понятія о безконечномъ и о безконечно маломъ, на которыхъ основывается Анализъ? Чѣмъ открытіе Лейбница отличается отъ обыкновенной алгебры, съ которой каждый болѣе или менѣе знакомъ? По какимъ темнымъ тропинкамъ ведетъ она насъ къ открытію истины, и не рискуемъ ли мы въ этомъ переходѣ оставить нѣсколько частицъ математической точности? Въ механикѣ, какая доля принадлежитъ разсужденію

и какая опыту? Что заключаютъ въ себѣ необходимаго и что случайнаго открытые нами законы? Что обезпечиваетъ сохраненіе силы и движенія во вселенной? Не предвидится ли постепеннаго уменьшенія причинъ, производящихъ наблюдаемое нами движеніе матеріи?

Я старался отвѣтить на эти вопросы и на нѣсколько другихъ. Я хотѣлъ также свести къ ихъ простѣйшему выраженію понятія, свойственныя этимъ наукамъ. Мнѣ казалось, что Анализъ происходитъ непосредственно изъ идей пространства и времени, а Механика — изъ понятій о силѣ и массѣ. Въ сущности, въ самыхъ сложныхъ задачахъ динамики мы стремимся всегда найти вѣчное отношеніе, установленное природой, между единицей силы и единицей массы; все же остальное имѣетъ лишь побочное значеніе. Что касается Анализа, то трудно себѣ представить—какимъ образомъ онъ могъ бы образоваться, если бы мы не обладали уже, благодаря пространству и времени, понятіями о безконечности, о непрерывности, и вслѣдствіе этого представленіемъ безконечнаго дѣленія и безконечно малаго количества.

Я старался представить эти выводы, не прибѣгая къ техническимъ вспомогательнымъ средствамъ. Этого рода доказательства не нуждаются въ формулахъ алгебры и геометрическихъ фигурахъ. Я долженъ былъ оставить въ сторонѣ много интересныхъ вопросовъ, для того чтобы заняться самыми выдающимися пунктами, тѣми, которые, по моему мнѣнію, должны являться особенно занимательными для образованныхъ людей. Но за то въ трехъ отдѣльныхъ примѣчаніяхъ я коснулся предметовъ, нѣсколько выходящихъ изъ моихъ рамокъ, но которые я не могъ совершенно пройти молчаніемъ. Трудно изслѣдовать значеніе времени и пространства въ математикѣ и ничего не сказать затѣмъ о возбуждаемыхъ ими спорахъ въ философіи. Не менѣе трудно также, разсматривая преобразованія во вселенной, не остановить своей мысли одно мгновеніе на задачѣ, занимавшей столько умовъ, о ея безконечности, на задачѣ безъ сомнѣнія навсегда неразрѣшимой, но относительно которой современная физика

допускаетъ однако нѣкоторыя догадки. Наконецъ, такъ какъ детерминизмъ полагаетъ, что имъ найденъ аргументъ для собственной защиты въ теоремѣ сохраненія энергіи, то я разсмотрѣлъ вкратцѣ значеніе этого мнимаго столкновенія между нравственной свободой и законами, управляющими матеріей.

Особенно же я задался въ этомъ сочиненіи цѣлью указать путь, по которому я совѣтовалъ бы слѣдовать ученымъ. Моя цѣль была бы достигнута, если бы я убѣдилъ нѣкоторыхъ изъ нихъ поднять своимъ авторитетомъ этотъ родъ изслѣдованій, и если бы я внушилъ отнынѣ нѣкоторымъ писателямъ, получившимъ литературно-гуманитарное образованіе (lettrés), желаніе заняться ближе этими обѣими науками, болѣе легкими для усвоенія, чѣмъ это предполагаютъ, науками, которыя представляютъ одно изъ самыхъ могучихъ усилій человѣческаго ума въ отысканіи истины.

ОЧЕРКИ ПО ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ.

I.

АНАЛИЗЪ.

ГЛАВА I.

Пространство и время.

Понятія о пространствѣ и времени играютъ первенствующую роль въ образованіи какъ математическихъ, такъ и физическихъ наукъ. Они не только заключаются въ опредѣленіяхъ главныхъ предметовъ, разсматриваемыхъ этими науками, но часто сами доставляютъ непосредственный матеріалъ для вычисленій. Геометрія и механика, по преимуществу, безпрестанно прибѣгаютъ къ измѣренію протяженій и времени. Даже въ тѣхъ отрасляхъ знанія, гдѣ эти понятія, повидимому, отсутствуютъ, нерѣдко можно найти слѣды ихъ вліянія. Числа въ ариѳметикѣ и количества въ алгебрѣ имѣютъ безспорно отвлеченный характеръ; но первоначально первыя обозначали собранія конкретныхъ единицъ, находящихся, слѣдовательно, въ зависимости отъ пространства и времени, а вторыя представляли собою части протяженія, обыкновенно отрѣзки прямой линіи, являющіеся по своей простотѣ лучшимъ символомъ для изображенія измѣненій величины. Поэтому можно спросить себя, что сталось бы съ этими двумя прекрасными науками, если бы онѣ были совсѣмъ лишены понятій о пространствѣ и о времени, и если бы мы располагали данными одной только логики.

Даже самыя идеи о порядкѣ и классификаціи, еще болѣе общія, чѣмъ математика, были бы, безъ сомнѣнія, менѣе ясны, если бы передъ нами не существовало перспективы неопредѣленнаго пространства, въ которомъ предметы располагаются въ рядъ или ставятся другъ на друга. Со своей сто-

роны, отношенія причины къ дѣйствію, господствующія во всѣхъ нашихъ знаніяхъ, касающихся природы, неразрывно связаны съ идеей послѣдовательности, т. е. продолжительности.

Я не буду пытаться опредѣлять пространство и время, помня совѣтъ Паскаля: „кто могъ бы опредѣлить время? и къ чему браться за это, если всѣ люди понимаютъ, что хотятъ сказать, говоря о времени и не приводя ближайшаго обозначенія его?“ [1]).

Не буду также касаться столь спорнаго вопроса о метафизическомъ характерѣ этихъ понятій: *объективны-ли* онѣ или *субъективны*, какъ выражаются философы? соотвѣтствуютъ ли они находящимся внѣ насъ реальностямъ, или же представляютъ собою однѣ лишь формы мышленія? Споръ по этому поводу далеко еще не конченъ, и я сомнѣваюсь даже, чтобъ онъ когда-нибудь прекратился, потому что въ вещахъ такого рода каждый руководствуется гораздо болѣе личной склонностью и совокупностью впечатлѣній, часто трудно поддающихся анализу, чѣмъ формальными и безупречными доказательствами.

Къ тому же вопросъ этотъ, въ высшей степени интересный съ точки зрѣнія чистой метафизики, не относится къ предмету, занимающему меня въ настоящее время. Образованіе и развитіе наукъ ничуть не зависятъ отъ того или другого исхода этого предварительнаго спора. Представляютъ ли пространство и время реальные предметы, или же только кажутся намъ такими, въ обоихъ случаяхъ мы

---

[1]) Pensées de Blaise Pascal, premiére partie, art. II.

Паскаль говоритъ также: „самое лучшее правило, которому должны слѣдовать люди, состоитъ не въ томъ, чтобы все опредѣлять и все доказывать, или же, наоборотъ, ничего не опредѣлять и ничего не доказывать, но въ томъ, чтобы держаться средины— не опредѣлять того, что ясно само по себѣ и для всѣхъ понятно, и давать опредѣленіе всему остальному, а также въ томъ, чтобы вовсе не доказывать вещей общеизвѣстныхъ и приводить доказательства для всего остального. Противъ этого правила одинаково грѣшатъ и тѣ, которые берутся все опредѣлить и все доказать, и тѣ, которые не дѣлаютъ этого относительно вещей, не очевидныхъ самихъ по себѣ.

Этому въ совершенствѣ учитъ насъ геометрія. Она не опредѣляетъ *пространства*, *времени*, *движенія*, *числа*, *равенства* и многихъ другихъ подобныхъ имъ терминовъ, потому что термины эти для всякаго, понимающаго языкъ, до того естественно обозначаютъ называемые ими предметы, что попытка объяснить ихъ привела бы скорѣе къ затемнѣнію, чѣмъ къ разъясненію ихъ смысла“.

приписываемъ имъ одни и тѣ же свойства, являющіяся для нашего мышленія исходной точкой однихъ и тѣхъ же выводовъ. Составляя уравненіе движенія, ни одинъ геометръ не задается вопросомъ о томъ, объективное ли или субъективное значеніе имѣютъ пройденныя пространства и протекшіе промежутки времени. Формулируя законъ охлажденія въ безвоздушномъ пространствѣ или законъ передачи свѣта, ни одинъ физикъ не задумается надъ подобнымъ вопросомъ. Тому и другому изъ нихъ достаточно лишь одного, чтобы вычисленія всегда подтверждались опытомъ, и чтобы введеніе пространства и времени въ выраженіе физическихъ законовъ никогда не влекло за собою неясности въ языкѣ или смѣшенія понятій. Съ ихъ точки зрѣнія протяженность и продолжительность представляются величинами, обладающими свойствомъ увеличиваться или уменьшаться въ зависимости отъ величинъ, встрѣчаемыхъ въ природѣ. Ихъ метафизическое происхожденіе не имѣетъ никакого вліянія на способы ихъ употребленія и на дѣйствія, въ которыхъ они участвуютъ.

Столь же безразлично относятся къ данному вопросу и люди, чуждые наукѣ. Соціальныя отношенія, въ которыхъ вопросы пространства и времени имѣютъ столь важное значеніе, не зависятъ отъ перемѣнъ философскихъ рѣшеній задачи. Даже въ томъ случаѣ, если бы всѣ единодушно признали ихъ субъективный характеръ, даже тогда ни обычный языкъ, ни редакція законовъ и договоровъ, ни жизненные обычаи не подверглись бы отъ этого ни малѣйшимъ измѣненіямъ

Пространство и время или въ дѣйствительности необходимы, безконечны, непрерывны и однородны, или намъ кажутся таковыми.

Этой общностью свойствъ пространства и времени оправдывается стремленіе мыслителей сблизить ихъ въ своихъ теоріяхъ; ею же объясняется также и тождественность рѣшенія вопроса о реальности того и другого. Въ этомъ отношеніи философскія школы никогда не дѣлали между ними различія: утверждая или отрицая реальность одного, они, въ то же время, признавали или отвергали и реальность другого.

Рядомъ съ этими свойствами, имѣющими первенствующее значеніе, и которыя потомъ я разсмотрю подробнѣе, слѣдуетъ указать на многочисленные контрасты, заранѣе опредѣлившіе для пространства и времени совершенно различныя роли въ происхожденіи научныхъ знаній.

Пространство представляется намъ имѣющимъ три измѣренія, время же — только одно; оно развертывается въ линейный рядъ. Для опредѣленія положенія точки въ пространствѣ необходимо имѣть три координаты. Для обозначенія же мѣста явленія или историческаго событія во времени достаточно, по справедливому замѣчанію Курно [1]), только одной координаты, а именно—даты, или промежутка времени, отсчитываемаго отъ нѣкотораго условнаго момента. Анналы человѣчества всегда велись по этому способу, и никто не думалъ оспаривать ихъ точность.

Пространство неизмѣнно и какъ-бы закончено. Сегодня оно то же, что было вчера и чѣмъ будетъ завтра. Время же преобразуется безпрестанно. Дни послѣдовательно отдѣляются отъ будущаго и переходятъ въ прошедшее. Пространство неподвижно. Время же сама подвижность: оно движется впередъ или течетъ непрерывно. Въ нашей мысли оно связано со всѣми измѣненіями; пространство же представляетъ собою неподвижность и постоянство.

Пространство открывается намъ чувствами: глазъ обнаруживаетъ болѣе или менѣе обширныя его части, а осязаніемъ мы познаемъ тѣла, обладающія протяженностью. Время же постигается исключительно разумомъ. Никакое внѣшнее чувство, никакое физическое наблюденіе не могло бы намъ дать о немъ даже самаго слабаго представленія. Мы соприкасаемся съ нимъ лишь однимъ мгновеніемъ и, прежде чѣмъ мы можемъ уловить и усвоить этотъ моментъ, мы замѣчаемъ, что онъ уже безслѣдно исчезъ. Мы не только не въ состояніи обнять сколько-нибудь значительнаго промежутка времени, но даже едва припоминаемъ его теченіе или, вѣрнѣе, только сохраняемъ воспоминаніе о совпавшихъ съ нимъ явленіяхъ, такъ какъ безъ нихъ представленіе о протекшемъ времени осталось бы въ нашемъ умѣ смутнымъ и неопредѣленнымъ.

Метафизики полагаютъ, что при отсутствіи внѣшнихъ фактовъ, одного чувства нашей внутренней жизни, одной послѣдовательной смѣны нашихъ мыслей было бы достаточно для образованія идеи о времени. Идея же о пространствѣ, напротивъ, возникаетъ вслѣдъ за впечатлѣніями, полученными извнѣ, и благодаря знакомству съ природой.

---

[1]) Cournot. Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractéres de la critique philosophique, t. I, p. 304.

Изъ этого уже видно, до какой степени различны должны быть умозрѣнія, касающіяся этихъ идей.

Мы можемъ непосредственно измѣрять протяженія: сравнивать ихъ между собою; накладывать прямую линію на прямую линію и плоскость на плоскость; мы можемъ опредѣлить, сколько разъ одна длина заключается въ другой. Имѣя дѣло съ болѣе сложными протяженіями: кривыми линіями, поверхностями и объемами, мы заимствуемъ изъ геометріи надежные способы для сведенія ихъ мѣры къ мѣрѣ простѣйшихъ протяженій. Въ концѣ концовъ, все сводится къ элементарному, почти наглядному дѣйствію, къ наложенію прямыхъ линій другъ на друга.

Совсѣмъ иное происходитъ при измѣреніи времени. Мы не можемъ удержать или фиксировать какой-нибудь промежутокъ времени для наложенія его на другіе, столь же преходящіе промежутки и сосчитать, сколько разъ первый содержится въ послѣднихъ. Прямой путь намъ недоступенъ. Время можетъ быть измѣрено только косвеннымъ и искусственнымъ путемъ.

Отказавшись отъ мысли постигнуть время, мы замѣняемъ его внѣшнимъ признакомъ, осязательной примѣтой, находящейся въ нѣкоторомъ соотвѣтствіи съ нимъ. Мы принимаемъ за единицу времени не часть этого ускользающаго отъ насъ времени, а неопредѣленный самъ по себѣ его промежутокъ, протекающій въ продолженіе совершенія какого-нибудь опредѣленнаго явленія. Съ тѣхъ поръ для каждаго даннаго промежутка времени мы опредѣляемъ, сколько разъ въ продолженіе его могло бы повториться явленіе, принятое нами за типическое. Такимъ образомъ получается мѣра продолжительности даннаго промежутка времени, т. е. находится ея отношеніе къ продолжительности времени совершенія типическаго явленія.

Примѣры подобныхъ пріемовъ часто встрѣчаются въ наукахъ. Величины, недоступныя нашимъ непосредственнымъ наблюденіямъ, замѣняются другими пропорціональными имъ или принимаемыми нами за таковыя, и вычисленіе которыхъ оказывается для насъ болѣе легкимъ. Причины измѣряются ихъ дѣйствіями, или проявленіями, имѣющими съ ними строго установленное соотношеніе. Измѣреніе времени представляется такого же рода операціей и притомъ тѣмъ болѣе законной, чѣмъ проще въ данномъ случаѣ предметы, съ которыми приходится имѣть дѣло, и чѣмъ безспорнѣе ихъ соотвѣтствіе другъ съ другомъ.

Но точность получаемыхъ результатовъ отнюдь не очевидна сама по себѣ, помимо всякихъ другихъ соображенiй. Что даетъ намъ право считать равными промежутки времени, соотвѣтствующiе совершенiю вполнѣ, повидимому, тождественныхъ явленiй, но наблюдаемыхъ въ разныя эпохи? Почему, напримѣръ, данный сосудъ воды опоражнивается всегда въ одинаковое время? Почему данная звѣзда проходитъ черезъ меридiанъ по истеченiи одного и того же промежутка времени? Почему значенiе, присущее часу или секундѣ, останется всегда однимъ и тѣмъ же?

Наша увѣренность на этотъ счетъ происходитъ вслѣдствiе общаго убѣжденiя въ томъ, что „законы природы постоянны". Но откуда мы получаемъ это самое убѣжденiе? Безъ сомнѣнiя изъ опыта. До него нельзя было дойти путемъ умозрѣнiя. *A priori* мы не усматриваемъ необходимости въ неопредѣленно продолжающемся равенствѣ длительности сутокъ. Противоположный фактъ, если бы онъ случился, не затронулъ бы ни малѣйшимъ образомъ законовъ нашего мышленiя. Итакъ, измѣренiе времени основывается на относительной истинѣ. Точно такой же характеръ имѣетъ и достовѣрность получаемыхъ при измѣренiи результатовъ.

Совсѣмъ инымъ свойствомъ отличается достовѣрность, присущая измѣренiю протяженiй. Истина, на которой оно основано, не зависитъ отъ строя явленiй физическаго мiра. Среди величайшихъ переворотовъ въ природѣ мы не перестанемъ, все-таки, утверждать, что два отрѣзка прямой, концы которой совпадаютъ, равны между собою. Измѣненiя въ напряженiи тяжести, или въ скорости движенiя земли по орбитѣ нисколько не нарушили бы этой аксiомы. Результаты измѣренiя протяженiй—оставляя, разумѣется, въ сторонѣ погрѣшности, происходящiя отъ несовершенства матерiальныхъ средствъ измѣренiя—обладаютъ, слѣдовательно, характеромъ абсолютныхъ истинъ.

Теченiе времени не только непрерывно и неудержимо, но и представляется намъ равномѣрнымъ. Это еще не все—оно кажется намъ условiемъ и типомъ равномѣрности. Безъ него мы не имѣли бы никакого способа распознать равномѣрность явленiй. Явленiе называется нами равномѣрнымъ въ томъ случаѣ, если оно развивается въ точности пропорцiонально времени; движенiе тѣла равномѣрно, когда проходимыя имъ пространства увеличиваются пропорцiонально протекшему времени. Притокъ воды въ источникѣ равномѣренъ, если доставляемое имъ количество ея пропорцiо-

нально времени или если оно постоянно для каждой единицы времени. Всякое измѣненіе, наблюдаемое въ этомъ количествѣ, пришлось бы отнести на счетъ недостаточно равномѣрнаго функціонированія источника. У насъ никогда не явилось бы и мысли утверждать, что количество доставляемой воды осталось то же, а время перестало быть равномѣрнымъ.

Эта увѣренность, давно укоренившаяся и ставшая несокрушимой, возникла, однако же, не самопроизвольно. Она не имѣетъ въ нашихъ глазахъ характера необходимости, какъ самая идея о времени или о его непрерывности. Она плодъ медленно пріобрѣтеннаго опыта, выводъ изъ котораго получился какъ бы безъ нашего вѣдома. Если бы каждый изъ насъ слѣпо полагался на свои личныя впечатлѣнія, то сколько разъ мы оказывались бы склонны приписывать неравномѣрность ходу времени. Кто изъ насъ не замѣчалъ очень часто, а иногда и не сѣтовалъ, то на слишкомъ быстрое, то на слишкомъ медленное его теченіе? Но въ противовѣсъ этимъ мимолетнымъ впечатлѣніямъ передъ нами возникаютъ болѣе серьезныя, болѣе продолжительныя свидѣтельства. Вокругъ насъ совершаются величественныя явленія, неподдающіяся вліянію столь сильно волнующихъ насъ обстоятельствъ. Движеніе солнца и звѣздъ, чуждое человѣческимъ радостямъ и печалямъ, является въ этомъ случаѣ, чтобы предостеречь насъ отъ непростительной ошибки, въ которую мы могли бы впасть, относя къ этому огромному механизму возмущенія, происходящія въ насъ самихъ. Поэтому, мы принуждены отбросить, какъ простыя иллюзіи, неравенства, поразившія на мигъ наше воображеніе. Сверхъ того, для насъ достаточно было бы посмотрѣть на нашихъ ближнихъ: между тѣмъ какъ время протекало слишкомъ медленно для насъ, для нихъ оно летѣло быстрѣе и быстрѣе.

Но если бы мы были изолированы другъ отъ друга и лишены доставляемыхъ вселенной великихъ точекъ сравненія, мы впали бы—въ томъ, что касается теченія времени,—въ ошибку, подобную той, въ которую впали древніе относительно движенія звѣздъ. Они заставили ихъ вращаться вокругъ земли, какъ неподвижнаго міроваго центра. Точно такъ же и мы, предоставленные своимъ собственнымъ мыслямъ, пришли бы къ убѣжденію, что время течетъ неравномѣрно, и стали бы искать другой эмблемы равномѣрности, если бы только подобная идея могла еще найти мѣсто въ нашемъ сознаніи.

Природа, какъ говорится уже давно, представляетъ собою зрѣлище вѣчнаго біванія. Свѣтила совершаютъ свой путь на небѣ; на землѣ все измѣняется, все проходитъ, все преобразовывается; животныя и растенія растутъ, исчезаютъ и своими останками подготовляютъ появленіе новыхъ поколѣній. Физическія, химическія и электрическія силы оспариваютъ другъ у друга владычество надъ матеріей. Самыя разнообразныя явленія встрѣчаются, сталкиваются, переплетаются между собой. Человѣческій глазъ ни на минуту не перестаетъ созерцать то новыя, то повторяющіяся явленія.

Каждое изъ явленій, обращающихъ на себя наше вниманіе, развивается въ свойственной ему формѣ, и каждое такое развитіе происходитъ въ соотвѣтствіи съ временемъ. Ходъ этого послѣдняго, его равномѣрное теченіе служитъ постояннымъ терминомъ сравненія. Отсюда возникаетъ понятіе о *скорости* или отношеніи между ходомъ явленія и ходомъ времени. Первоначально этотъ терминъ примѣняется къ простѣйшему и наиболѣе легко различимому явленію, а именно—къ движенію тѣла, равномѣрно перемѣщающагося по прямой линіи. Скорость есть постоянное отношеніе пройденнаго разстоянія къ времени, употребленному на его прохожденіе, или же постоянное разстояніе, пройденное въ единицу времени. Если движеніе перестаетъ быть равномѣрнымъ, если оно ускоренное или замедленное, то скорость все еще остается отношеніемъ пройденнаго пространства ко времени, но только въ томъ случаѣ, когда это время достаточно мало для того, чтобы движеніе, ему соотвѣтствующее, не измѣнилось чувствительнымъ образомъ за данный промежутокъ и чтобы это движеніе можно было разсматривать, какъ равномѣрное.

То же понятіе о скорости распространяется на всѣ явленія, въ которыхъ можетъ быть подмѣчена точная связь между наблюдаемымъ измѣненіемъ и истекшимъ временемъ. Въ этомъ смыслѣ говорятъ: скорость охлажденія тѣла, скорость испаренія жидкости, скорость наполненія газомъ аэростата, потому что можно измѣрить количество потерянной теплоты, массу испарившейся жидкости или увеличеніе объема аэростата въ единицу времени. Этимъ не ограничиваются и примѣняютъ этотъ терминъ также къ явленіямъ соціальнымъ или, скорѣе, къ синтезамъ фактовъ, въ которыхъ общая равнодѣйствующая ускользаетъ отъ прямого изслѣдованія и обнаруживается въ данныхъ статистики, позволяющихъ достигнуть нѣкоторой идеи цѣлаго. Такимъ-то

образомъ соціологи при помощи метафоры, впрочемъ весьма удобной, отличаютъ скорость приращенія народнаго богатства или народонаселенія, возрастанія преступности или несчастныхъ случаевъ, скорость распространенія какого-нибудь бѣдствія, ученія или религіи. Во всѣхъ подобныхъ случаяхъ изслѣдователи ставятъ себѣ задачей оцѣнить важность явленія и отдать себѣ въ немъ отчетъ на основаніи числа отдѣльныхъ фактовъ его совершенія въ теченіе опредѣленнаго времени, всегда одинаковаго для однородныхъ фактовъ. Нѣтъ болѣе простого и болѣе соотвѣтствующаго нашему пониманію способа сравненія. Поэтому-то скорость въ случаяхъ самыхъ элементарныхъ, въ случаяхъ прямолинейнаго движенія, и явилась современницей первыхъ научныхъ наблюденій человѣчества. Она прямо вытекаетъ изъ понятія о времени и его равномѣрности.

Геометры, развивая на свой ладъ идею, почерпнутую изъ общаго источника, отнесли къ единицѣ времени перемѣны въ ходѣ явленія, замѣченныя въ двѣ различныя эпохи. Въ самомъ дѣлѣ, ходъ явленія въ послѣдовательныхъ его фазахъ ускоряется и замедляется неправильнымъ образомъ: онъ измѣняется то быстрѣе, то медленнѣе. Увеличеніе или уменьшеніе скорости отъ одной эпохи до другой можетъ быть сравниваемо съ увеличеніемъ или уменьшеніемъ пространства, пройденнаго въ единицу времени, и является, въ сущности, скоростью „измѣненія скорости“. Эту скорость второго порядка геометры назвали *ускореніемъ* и они часто пользуются имъ въ механикѣ. Они видятъ въ немъ, именно, мѣру той, часто неизвѣстной, причины, вслѣдствіе которой это измѣненіе скорости увеличивается или уменьшается въ напряженіи.

Пространство и время соотвѣтствуютъ двумъ весьма различнымъ родамъ знаній. Пространство представляетъ собою область наукъ, которыя, оставляя въ сторонѣ всякія измѣненія, ищутъ вѣчныя отношенія вещей между собою. Важнѣйшая изъ нихъ есть геометрія. Изображаемыя ею фигуры или способы разграниченія протяженія не требуютъ разсмотрѣнія времени. Свойства ихъ отъ него не зависятъ; оно никогда не встрѣчается въ уравненіяхъ, устанавливаемыхъ между ихъ элементами. Тѣмъ болѣе алгебра и ариѳметика остаются чуждыми времени. Онѣ нашли въ немъ такъ же, какъ и въ пространствѣ, полезное пособіе для своего образованія, но не подчинены ему: въ качествѣ выраженій чистой логики, онѣ существуютъ внѣ условій пространства и времени.

Геометрія часто прибѣгаетъ къ подобію движенія. Она предполагаетъ, что линіи или поверхности, перемѣщаясь по извѣстному закону, производятъ фигуры. Но эти перемѣщенія, подобно величинамъ въ алгебрѣ, имѣютъ отвлеченный характеръ. Они не связаны ни съ временемъ, ни съ какимъ-либо другимъ элементомъ, относящимся къ движенію реальнаго тѣла. Они могли бы совершаться или весьма быстро, или очень медленно, результатъ отъ этого не измѣнился бы: въ этомъ случаѣ насъ интересуютъ только свойства этихъ фигуръ. При вращеніи круга, образующаго шаръ, или прямоугольника, производящаго цилиндръ, время не принимается въ расчетъ. Движеніе, къ которому прибѣгаютъ въ этихъ случаяхъ, представляетъ собою просто умственную операцію, искусственный пріемъ описанія. Съ этой точки зрѣнія, изученіе машинъ, сведенное къ ознакомленію съ взаимнымъ положеніемъ ихъ частей, относится къ области геометріи. Перемѣщеніе нѣкоторыхъ точекъ—или даже только одной—влечетъ за собой измѣненіе положенія всѣхъ остальныхъ вслѣдствіе математическихъ законовъ, въ которыхъ ни время, ни силы, ни массы не играютъ никакой роли.

Статика, или наука о равновѣсіи силъ (если не вводить въ нее нѣкоторыхъ опытныхъ основъ, что не всегда дѣлается), также не зависитъ отъ времени. Соотношенія между силами существуютъ во всякое время. Система, въ которой онѣ уравновѣшиваются, неизмѣнна по формѣ, а если и измѣняется, то лишь отвлеченно; въ дѣйствительности же дѣло идетъ о послѣдовательныхъ фигурахъ, сводящихся одна къ другой согласно простому закону. Знаменитая теорема о возможныхъ скоростяхъ Д'Аламбера въ сущности есть не что иное, какъ геометрическое предложеніе.

Мертвой и неподвижной казалась бы намъ вселенная при отсутствіи въ ней времени. Появленіе на сценѣ этого элемента служитъ сигналомъ ко всѣмъ явленіямъ. Отъ величественныхъ колебаній звѣздъ до неуловимыхъ вибрацій молекулъ—все движущееся и измѣняющееся является данникомъ времени. Время есть условіе жизни и душа того непрестаннаго биванія, въ тайну котораго мы тщетно стараемся проникнуть. Науки, занимающіяся изученіемъ явленій, должны, слѣдовательно, всѣ съ нимъ считаться. Первая изъ физическихъ наукъ—механика остается съ нимъ связанной всегда. Пространство, время и скорость составляютъ для нея три неотдѣлимыхъ отъ нея предмета [1]). Чело-

[1]) Скорость является синтезомъ обѣихъ идей: пространства и времени.

вѣческій разумъ связываетъ ихъ вмѣстѣ во всякомъ вопросѣ динамики. Онъ находитъ ихъ въ различной степени въ безчисленныхъ превращеніяхъ, происходящихъ въ природѣ. Иногда онъ пренебрегаетъ то тѣмъ, то другимъ изъ нихъ, если роль его кажется ему незначительной, но, все-таки, онъ не можетъ устранить его совершенно. Въ химическихъ реакціяхъ онъ часто не принимаетъ въ расчетъ времени, потому что весь интересъ особенно сосредоточивается здѣсь на самой реакціи, время же имѣетъ мало значенія, хотя, все-таки, и составляетъ необходимый факторъ совершающагося дѣйствія. Въ геологіи, напротивъ, интересъ, связанный съ разсмотрѣніемъ пространства, имѣетъ второстепенное значеніе, по сравненію съ изслѣдованіемъ дѣйствовавшихъ силъ и результатовъ ихъ работы, произведенной въ теченіе ряда вѣковъ.

Итакъ, всѣ науки въ большей или меньшей степени обязаны пространству или времени, а часто тому и другому. Но если нѣкоторыя изъ нихъ и могли возникнуть на идеѣ одного лишь пространства, то, напротивъ, нѣтъ ни одной для возникновенія которой достаточно было бы идеи времени. И это вполнѣ понятно: пространство съ неизбѣжно присущими ему тремя измѣреніями производить всякаго рода комбинаціи. Число геометрическихъ фигуръ безконечно, и свойства ихъ неисчерпаемы. Время же, напротивъ, имѣя только одно измѣреніе, не даетъ почвы для умозрѣній. Самое большее, если путемъ дѣленія прямой линіи, символизирующей время, удалось бы воспроизвести нѣчто, подобное натуральному ряду чиселъ. Но уже сама прямая, принадлежащая по своему типу къ пространству, была изучена въ геометріи, гдѣ она и была предметомъ выводовъ, въ которыхъ время не играло никакой роли; она не способна уже привести ни къ какимъ новымъ заключеніямъ.

Понятіе о времени не можетъ, слѣдовательно, одно само по себѣ, дать начало какому-либо научному сцѣпленію идей. Для исполненія этой великой миссіи его надо поставить въ связь съ идеей о пространствѣ, и тогда плодотворность его становится несравненной. Оно оживляетъ всѣ отрасли знанія, которыя стремятся установить отношенія причинъ къ ихъ дѣйствіямъ. Оно ложится въ основу всѣхъ изслѣдованій, имѣющихъ цѣлію опредѣленіе законовъ природы и описаніе ея процессовъ.

ГЛАВА II.

Безконечное.

Всякому памятны удивительныя размышленія Паскаля о безконечномъ. Чей умъ проникалъ глубже въ созерцаніе этого подавляющаго предмета, чѣмъ умъ Паскаля? Кто жилъ въ болѣе непосредственномъ лицезрѣніи этой необыкновенной идеи, которой мы тщетно искали бы даже отдаленнаго представленія? Паскалю безконечность открылась при помощи сверхчувственнаго умозрѣнія, безъ котораго, говорилъ онъ, нельзя быть геометромъ. Какимъ образомъ, въ самомъ дѣлѣ, наблюденіе могло бы внушить идею о безконечности? Наблюденіе всегда ограничено, оно постоянно обнимаетъ лишь узкій горизонтъ.

Безъ сомнѣнія, при изученіи предметовъ, доступныхъ нашему познанію, мы знакомимся сперва съ нѣкоторой ограниченной ихъ частью, иногда весьма малой, и затѣмъ мы дѣлаемъ заключеніе „отъ малаго къ большому", „отъ части къ цѣлому". Но къ чему послужилъ бы намъ этотъ процессъ при попыткѣ постигнуть безконечное? Вѣдь безконечное нельзя считать цѣлымъ, по отношенію къ которому конечное представляло бы часть. Безконечное не имѣетъ частей. Между конечнымъ и безконечнымъ нѣтъ общей мѣры, нѣтъ градаціи, нѣтъ отношенія. Безконечное существуетъ, и ничто не можетъ дать о немъ идеи, кромѣ него самого. Все конечное не только отлично, но и противоположно ему; оно не вызываетъ идеи безконечнаго, а исключаетъ ее.

Отсутствіе достаточнаго вниманія иногда приводитъ къ иллюзіи, отъ которой, однако, предостерегаютъ философы: безконечное (l'infini) смѣшиваютъ съ неопредѣленнымъ (l'indéfini). Къ сожалѣнію, математическій языкъ способствуетъ этому смѣшенію. Употребленіемъ такихъ выраженій, какъ „дѣленіе до безконечности", „безконечно малое", вмѣсто: *дѣленіе неопредѣленное, количество неопредѣленно уменьшающееся*, оно поощряетъ смѣшеніе обѣихъ идей. Конечно, истинные геометры не ошибаются на этотъ счетъ. Въ ихъ глазахъ нѣтъ ничего болѣе несходнаго, какъ неопредѣленное и безконечное. Неопредѣленное представляетъ собою просто-напросто конечное, но съ прибавленіемъ къ нему понятія перемѣннаго. При этомъ очертанія конечнаго становятся неясными и неуловимыми, но при-

рода его не измѣняется. Какъ бы ни было оно неопредѣленно, оно, все-таки, не перестаетъ быть конечнымъ, и эта неопредѣленность, чуждая сущности вещей, не можетъ ввести въ заблужденіе людей, привыкшихъ разсуждать.

Если у насъ есть способность постоянно расширять конечное, раздвигать все болѣе и болѣе его границы, то это лишь вслѣдствіе того, что мы уже обладаемъ понятіемъ о безконечномъ. Внѣ этихъ, поставленныхъ на время границъ, разумъ признаетъ безпредѣльное поле, гдѣ воображеніе можетъ не стѣсняться какимъ угодно широкимъ полетомъ. Но при помощи послѣдовательнаго расширенія дѣятельности нашей мысли мы никогда не достигли бы безконечнаго; мы не подозрѣвали бы даже о его существованіи. Мы остались бы въ области конечнаго, можетъ быть, весьма обширнаго конечнаго, но, все-таки, отдѣленнаго отъ безконечнаго непроходимой пропастью. Такимъ образомъ, не только изъ неопредѣленнаго не выводится безконечнаго, а наоборотъ,—безконечное допускаетъ существованіе неопредѣленнаго и дѣлаетъ возможными всякія предположенія относительно величинъ.

Откуда же происходитъ понятіе о безконечномъ?

Натуры, у которыхъ поэтическое и религіозное чувство преобладаетъ надъ всѣми другими, охотно допускаютъ, что зрѣлище вселенной способно пробудить въ насъ подобную идею. Что болѣе способно вызвать ее, говорятъ они, какъ не видъ этихъ чудесъ, какъ не созерцаніе звѣзднаго неба, этихъ безчисленныхъ свѣтилъ, населяющихъ громадное пространство! Развѣ это не безконечное въ пространствѣ и во времени, точно такъ же, какъ въ могуществѣ Существа которое все это привело въ порядокъ?

„У сердца есть свои основанія, которыхъ не знаетъ разумъ“, сказалъ Паскаль, и, можетъ быть, этимъ-то путемъ онъ и приходитъ къ непосредственному созерцанію безконечнаго существа Но математикъ смотритъ на это иначе. Онъ не хочетъ быть обязанъ ничему, кромѣ самаго строгаго разума. Поэтому ему зрѣлище вселенной не могло бы внушить идеи безконечнаго.

Понятіе о громадности вселенной принадлежитъ къ новымъ и даже относительно къ современнымъ. Древніе держались на этотъ счетъ совсѣмъ иныхъ идей, чѣмъ мы. По ихъ мнѣнію, вселенная представляла собою сферу довольно небольшихъ размѣровъ, вращающуюся вокругъ земли, предполагавшейся неподвижной. Свѣтила должны

были находиться весьма близко къ намъ для того, чтобы имѣть возможность принимать участіе въ общемъ вращательномъ движеніи. Таково было господствующее мнѣніе въ Греціи въ то время, когда искусства и математическія науки достигли тамъ наибольшаго процвѣтанія. Кромѣ Пиѳагора и его учениковъ (да и тѣ держали свое ученіе даже въ секретѣ во избѣжаніе столкновенія со своими современниками), самые знаменитые геометры раздѣляли этотъ предразсудокъ, котораго не отвергалъ и великій Аристотель. Слѣдовательно, они не почерпали изъ созерцанія природы понятія о безконечномъ. Между тѣмъ они уже обладали имъ и даже въ весьма отчетливой формѣ, потому что примѣняли къ рѣшенію геометрическихъ задачъ остроумные методы, непосредственно основывающіеся на немъ. Способъ предѣловъ Архимеда и теорія коническихъ сѣченій Аполлонія заключали въ себѣ не менѣе основательное и ясное понятіе о безконечномъ, чѣмъ открытія Лейбница и Фермата.

Умственное развитіе ребенка, столь сходное въ своихъ послѣдовательныхъ фазахъ съ развитіемъ человѣчества, оправдываетъ это заключеніе. Въ то время, когда его обучаютъ первымъ началамъ геометріи, онъ еще совершенно не знаетъ о чудесахъ астрономіи. Онъ и не подозрѣваетъ еще о существованіи тѣхъ огромныхъ разстояній, до которыхъ достигли изслѣдованія современныхъ ученыхъ и едва ли знаетъ еще, что нашъ маленькій земной шаръ не представляетъ собою центра вселенной. Во всякомъ случаѣ, онъ не задавался вопросомъ о возможной безконечности вселенной. Тѣмъ не менѣе, онъ изучаетъ эвклидовы предложенія и приступаетъ къ теоріи параллельныхъ линій. Онъ безъ всякаго удивленія слышитъ, что эти прямыя никогда не встрѣчаются или (злоупотребляя выраженіемъ) что онѣ встрѣчаются только на безконечно большомъ разстояніи. Нѣсколько дней спустя онъ безъ труда допуститъ, что кругъ есть предѣлъ многоугольника, число сторонъ котораго становится безконечнымъ, и онъ выведетъ отсюда точный способъ для опредѣленія его площади и окружности. Какимъ образомъ эти идеи, эти разсужденія находятъ доступъ въ его умъ? Какимъ образомъ онѣ не приводятъ его въ смущеніе? Почему онъ не требуетъ точнаго объясненія этого великаго слова „безконечное“, которое, повидимому, такъ неожиданно ставитъ его внѣ привычныхъ ему понятій? Не слѣдуетъ ли отсюда, что почва къ этому уже была под-

готовлена и что понятіе о безконечномъ существовало у юнаго ученика гораздо раньше изученія имъ астрономіи, даже раньше изученія геометріи?

Въ наше время, правда, вселенная утратила тотъ узкій видъ, который когда-то имѣла. Вооруженные телескопами мы изслѣдовали глубины небеснаго свода. Мы знаемъ, что нашъ земной шаръ есть не что иное, какъ точка въ солнечной системѣ, а вся солнечная система представляется точкой въ громадномъ созвѣздіи млечнаго пути. Мы знаемъ, благодаря генію Ньютона, что небесныя тѣла вращаются въ силу всемірнаго тяготѣнія и что звѣзды находятся на доста точно большомъ разстояніи отъ солнца, чтобы вліяніе ихъ на него было не чувствительно. Физическія открытія показали намъ, что свѣтъ пробѣгаетъ триста тысячъ километровъ въ секунду, и что для прохожденія отъ одного края млечнаго пути до другого онъ долженъ употребить не менѣе тридцати тысячъ лѣтъ. Все это способно чрезвычайно расширить наше понятіе о вселенной. Но отъ этихъ колоссальныхъ размѣровъ можно ли заключать къ безконечному? Законна ли будетъ такая индукція? Не будетъ ли все еще оставаться пропасти между обоими понятіями?

Нашъ разумъ переходитъ эту пропасть, когда рѣчь идетъ о пространствѣ. Онъ признаетъ его безконечнымъ, потому что не могъ бы его представить себѣ иначе. Онъ не опредѣляетъ ему границъ. Онъ не представляетъ себѣ, чтобы внѣ этихъ границъ было что-либо отличающееся отъ пространства. Даже тѣ, кто оспариваетъ объективный характеръ пространства, не думаютъ отрицать безконечности, которую мы ему невольно приписываемъ. *Пространство безконечно, если только оно существуетъ.* Но такова ли вселенная? Я разумѣю подъ этимъ матеріальный міръ,— безчисленное множество окружающихъ насъ небесныхъ тѣлъ. Можемъ ли мы сказать объ этой вселенной, что безконечность составляетъ условіе ея существованія? Мы не осмѣлимся этого сдѣлать. Нашъ разумъ, не только остается нѣмымъ передъ этимъ вопросомъ, онъ не только ничего не утверждаетъ, но, въ дѣйствительности, нѣтъ никакого признака, который бы далъ возможность заключить въ пользу ея безконечности. Внѣшніе признаки скорѣе противорѣчили бы этому. Они не даютъ права составить, я долженъ въ этомъ сознаться, никакого формальнаго сужденія относительно этого предмета. Но уже изъ того только, что они оставляютъ умъ въ нерѣшительности, нельзя счи-

тать впечатлѣніе, производимое видомъ вселенной, первоначаломъ идеи о безконечномъ.

Недостаточное изученіе математики приводитъ часто къ ошибкамъ. Ей охотно приписываютъ силу, которой она не обладаетъ. Математика не изобрѣла ни искусства разсуждать, ни тѣхъ аксіомъ, на которыхъ она основывается. Она ихъ нашла въ общемъ наслѣдіи человѣчества. Единственная ея заслуга состоитъ въ томъ, что она сдѣлала изъ нихъ употребленіе, можетъ быть, съ бо̀льшимъ искусствомъ и счастіемъ, чѣмъ другія науки. Она точно также не создала понятія о безконечномъ, изъ котораго ей, однако, удалось извлечь такую удивительную пользу.

Начинающій, при встрѣчѣ въ первый разъ съ алгебраическимъ символомъ безконечности, бываетъ очень пораженъ странностью знака и претензіей ввести его въ вычисленіе. Онъ легко воображаетъ себѣ, что встрѣтился съ новой идеей, до того неожиданно предлагается ему эта математическая уловка. Но, подумавъ, онъ замѣтитъ, что математика не дала ему въ этомъ отношеніи ничего новаго. Понятіе о безконечномъ у него уже было; математика только вызвала его и ограничилась тѣмъ, что дала ему больше ясности и точности.

Что значилъ бы, въ самомъ дѣлѣ, математическій символъ безконечности для ума, не обладающаго этимъ понятіемъ? Этотъ символъ представляется обыкновенно въ элементарной алгебрѣ въ видѣ конечнаго количества, раздѣленнаго на нуль. Но какой же можетъ быть смыслъ подобнаго обозначенія? Развѣ возможно дѣлить какое-нибудь число на нуль? Что дѣлать съ дѣлителемъ, котораго не существуетъ? Очевидно, подобное дѣйствіе не осуществимо и отсюда должно было бы вытекать заключеніе, что предложенная задача не допускаетъ осмысленнаго рѣшенія.

Но геометръ отнюдь не останавливается на этомъ. Онъ позволяетъ себѣ сдѣлать слѣдующее замѣчаніе:

Чѣмъ больше уменьшается дѣлитель, тѣмъ больше увеличивается частное. Если дѣлитель становится менѣе всякой данной величины, частное дѣлается болѣе всякаго даннаго числа. Слѣдовательно, дробь, обладающая такимъ особеннымъ признакомъ, обозначаетъ, что никакое конечное количество не соотвѣтствуетъ вопросу. Какое же практическое слѣдствіе вытекаетъ отсюда? Вотъ тутъ-то и приходится сдѣлать скачекъ черезъ пропасть. Геометръ дѣлаетъ это смѣло при помощи уже ранѣе существующей у него идеи

о безконечномъ, которой онъ овладѣваетъ и распоряжается. Онъ желаетъ, напримѣръ, знать, на какомъ разстояніи перпендикуляръ къ прямой встрѣтитъ наклонную къ той же прямой. Допустимъ, что разстояніе указывается дробью, знаменатель которой равенъ нулю: отсюда онъ заключаетъ, что обѣ линіи не встрѣчаются, или—что онѣ параллельны, потому что параллельность есть единственное расположеніе, позволяющее утверждать, что точка встрѣчи находится на безконечно большомъ разстояніи. Онъ опредѣляетъ въ другомъ случаѣ разстояніе между фокусами одного и того же эллипса и наталкивается на тотъ же символъ. Онъ заключаетъ отсюда, что предполагаемый эллипсъ обладаетъ однимъ только фокусомъ и, что, въ дѣйствительности, онъ—парабола. Онъ вычисляетъ въ третьемъ случаѣ число сторонъ многоугольника и находитъ ту же дробь; отсюда онъ выводитъ, что предполагаемый многоугольникъ есть кривая, потому что ее одну онъ могъ бы назвать многоугольникомъ съ безконечнымъ числомъ сторонъ.

Въ этихъ вопросахъ, точно такъ же, какъ и во многихъ другихъ еще, положеніе всегда одинаковое. Въ извѣстный моментъ геометръ встрѣчается съ увеличивающейся неопредѣленностью, лишенной какого бы то ни было самостоятельнаго значенія, и изъ которой нельзя сдѣлать никакого вывода. Онъ становится на твердую почву, приходитъ къ разумному выводу лишь освобождаясь отъ этой неопредѣленности и переступая пропасть, отдѣляющую ее отъ безконечнаго. Достигнувъ этихъ высотъ, онъ получаетъ новое пониманіе, онъ открываетъ смыслъ у такихъ предметовъ, которые до сихъ поръ казались лишенными его. Онъ переносится, если можно такъ сказать, на противоположную сторону вопроса и обнимаетъ взоромъ другіе горизонты. Но при всемъ этомъ онъ пользуется средствами изъ общаго источника и вовсе не обязанъ ими математикѣ.

Два примѣра еще разъ вполнѣ пояснятъ мою мысль.

Изучая траекторіи кометъ, астрономы полагали, что нѣкоторыя изъ нихъ имѣютъ параболическую форму, слѣдовательно, безпредѣльны. Приводитъ ли насъ этотъ выводъ въ самомъ дѣлѣ къ встрѣчѣ съ безконечнымъ, и можно ли сказать, что онъ даетъ намъ о немъ идею? Прежде всего эти кривыя, можетъ быть, вовсе не таковы, какими ихъ предполагаютъ. Ничто не походитъ такъ на параболу, какъ достаточно удлиненный эллипсъ. Различія между предполагаемыми параболами и эллипсами могутъ быть достаточно малы,

что-бы ускользать отъ проницательности наблюдателей. То, что намъ кажется безконечнымъ, можетъ быть, просто обладаетъ очень большими размѣрами. Допустимъ, во всякомъ случаѣ, что траекторіи будутъ параболическія; какое право мы имѣемъ считать ихъ безконечными? Единственно на томъ лишь основаніи, что онѣ тождественны съ особыми кривыми, изучаемыми въ геометріи подъ именемъ *параболъ*. А эти послѣднія, ихъ-то почему мы представляемъ себѣ безконечными? Чтобы отвѣтить на этотъ вопросъ, достаточно припомнить происхожденіе коническихъ сѣченій. Греческіе геометры получали ихъ разсѣченіемъ конуса плоскостью, направленною подъ различными углами къ оси. При извѣстной величинѣ наклоненія плоскости, обѣ вѣтви кривой, расходясь все болѣе и болѣе отъ вершины конуса, никогда не встрѣчались. Такими представлялись параболы и ихъ безпредѣльное развитіе. Но одно это уже предполагаетъ существованіе безконечнаго пространства, гдѣ конусъ могъ бы свободно возвышаться. Понятіе о траекторіи слѣдуетъ за этой первоначальной идеей; оно возможно лишь при ея существованіи. Слѣдовательно, оно не внушаетъ мысли о безконечномъ, а вытекаетъ изъ нея.

Другой, хорошо знакомый примѣръ, представляетъ матеріальная точка, спускающаяся безъ тренія подъ вліяніемъ одной только тяжести по окружности круга, плоскость котораго вертикальна. Достигнувъ нижняго края круга, эта точка поднимается по другой сторонѣ съ убывающей скоростью и останавливается по достиженіи того именно уровня, съ котораго она начала спускаться. Время, употребленное на это двойное прохожденіе, на это цѣлое колебаніе, оказывается тѣмъ болѣе продолжительнымъ, чѣмъ ближе пунктъ отправленія движущейся точки находится отъ вершины. Если бы точка начала двигаться отъ самой вершины, то время полнаго ея колебанія, судя по обыкновеннымъ формуламъ, было бы безконечно. Но спросимъ себя опять: каковъ долженъ быть смыслъ алгебраическаго выраженія, которое опредѣляетъ, что продолжительность движенія безконечна или которое предполагаетъ, что пунктъ отправленія находится въ вершинѣ кривой? Въ этихъ условіяхъ движущаяся точка, находясь въ вершинѣ кривой безъ начальной скорости, не тронулась бы; она оставалась бы вѣчно въ покоѣ. Вотъ, слѣдовательно, крайній случай, котораго формула движенія, повидимому не могла въ себя включить. Если намъ и удается, однако, вывести его отсюда, то бла-

годаря способу разсужденія, аналогичному тому, который намъ позволилъ перейти отъ линій наклонныхъ къ линіямъ параллельнымъ. Время увеличивается подобно тому, какъ увеличивалось разстояніе отъ точки встрѣчи наклонныхъ; такъ что мы оставляемъ неопредѣленное для того, чтобы смѣло овладѣть комбинаціей, отвѣчающей безконечному значенію количества. Комбинація же эта не можетъ быть ни чѣмъ другимъ, кромѣ покоя; одинъ лишь онъ не находится въ противорѣчіи съ безконечной продолжительностью времени.

Такимъ образомъ, безконечное не открывается намъ ни математикой, ни картиной внѣшняго міра. Точно такъ же его нельзя считать ни предѣльнымъ значеніемъ неопредѣленнаго, ни послѣдней эволюціей величины. Оно представляется тѣсно связаннымъ съ пространствомъ и временемъ, являясь ихъ необходимымъ и неотъемлемымъ свойствомъ. Именно въ примѣненіи къ этимъ двумъ идеямъ, особенно же къ идеѣ пространства, слово „безконечное“ и пріобрѣтаетъ свой точный смыслъ. Гораздо менѣе ясно безконечное времени. Намъ удается его себѣ представить лишь при помощи образовъ, которые всѣ заимствованы у безконечности пространства. Постоянное теченіе рѣки, движеніе развивающейся цѣпи или безконечно тянущейся прямой линіи, разсматриваемыя, какъ эмблемы времени, напоминаютъ собою одно изъ измѣреній пространства. Въ пространствѣ, именно, помѣщаемъ мы всѣ матеріальныя реальности, въ немъ геометрическія фигуры располагаются по волѣ нашего воображенія.

Безконечное пространства служитъ настоящей опорой нашихъ знаній. Оно есть неистощимый источникъ, изъ котораго геометръ черпаетъ матеріалъ своей науки. Оно таится въ глубинѣ мысли физика, который замѣчаетъ его всегда по ту сторону ограниченныхъ протяженій, обнимаемыхъ его дѣйствительнымъ наблюденіемъ. Безконечное времени хотя и заключается въ формулахъ, но случайно, чаще въ видѣ отдѣльныхъ и гипотетическихъ случаевъ, нежели въ качествѣ формальной реальности. Мы не можемъ утверждать вѣчности ни за какимъ явленіемъ, ни за какимъ движеніемъ, тогда какъ безконечность вѣтви гиперболы или вѣтви параболы не производитъ въ нашемъ умѣ ни малѣйшаго сомнѣнія.

Другіе виды безконечнаго не проникли въ науку. Нашъ разумъ возвышается до безконечнаго красоты и добра, онъ

постигаетъ безконечное мудрости, высшаго разума, верховнаго могущества. Но эти понятія далеко не такъ отчетливы, какъ безконечное въ протяженіи, и они не могли бы, подобно послѣднему, быть подвергнуты математическимъ умозрѣніямъ. Качества, доведенныя нами, такимъ образомъ, до высшаго предѣла, не способны къ измѣренію. У насъ нѣтъ никакого средства опредѣлить ихъ степень, и вслѣдствіе этого они остаются въ области, недоступной для геометра. Что касается физика, то онъ не находитъ вокругъ себя ни одного предмета, который могъ бы быть облеченъ аттрибутомъ безконечности. Онъ не только не знакомъ съ безконечной силой, съ безконечной скоростью, съ безконечной температурой, но онъ даже не постигаетъ этихъ понятій. Самое большее, что онъ можетъ допустить, это—разсѣянное въ пространствѣ безконечное количество матеріи. Но это предположеніе не оказываетъ вліянія на результаты его вычисленій и не производитъ перемѣнъ въ его формулахъ. Онъ дѣйствуетъ и разсуждаетъ всегда въ области конечныхъ величинъ.

На какую бы мы точку зрѣнія ни стали, ограничимся ли мы спеціальной почвой или захотимъ обобщать и разсматривать различныя формы безконечнаго, самая идея, все-таки, остается для насъ неразрѣшимой загадкой. Находясь постоянно въ предѣлахъ конечнаго, не имѣя никакой надежды когда-нибудь освободиться отъ нихъ, какимъ образомъ мы усваиваемъ себѣ столь отличающееся ото всего понятіе? Но что еще замѣчательнѣе, такъ это именно то, что понятіе, предметъ котораго исчезаетъ отъ нашего постиженія служитъ, однако, для самыхъ остроумныхъ и для самыхъ точныхъ математическихъ изслѣдованій. Будучи одинаково неспособны, по выраженію Паскаля, понять какъ безконечность великаго, такъ и безконечность малаго, мы сумѣли воспользоваться той и другой для нашихъ цѣлей, вслѣдствіе чего интеллектуальная область обогатилась самою удивительною наукою: анализомъ безконечно малыхъ величинъ.

ГЛАВА III.

Непрерывность и дѣлимость до безконечности.

Пространство непрерывно и повсюду подобно самому себѣ. Мы не находимъ никакого различія между его частями.

Мы еще менѣе представляемъ себѣ, чтобы между двумя частями пространства могъ существовать промежутокъ, не принадлежащій пространству. По правдѣ говоря, пространство не имѣетъ частей. Нашъ умъ только ихъ воображаетъ себѣ; но раздѣленія не имѣютъ ничего реальнаго. Они лишь приходятъ на помощь нашей слабости, которую неопредѣленность сбиваетъ съ толку, и для которой необходимо найти себѣ точку опоры въ чемъ-нибудь точномъ и ограниченномъ.

Нахожденіе тѣлъ въ пространствѣ не измѣняетъ нашего раціональнаго взгляда на его непрерывность. Мы различаемъ, такъ сказать, пространство сквозь тѣла, и та часть, которую послѣднія случайно занимаютъ въ первомъ, соединяется съ окружающимъ пространствомъ точно такъ, какъ если бы тѣлъ въ ней вовсе и не было.

Эта непрерывность нисколько не походитъ на непрерывность тѣлъ вообще. Между той и другой существуетъ такое же различіе, какое замѣчается между геометрическими фигурами и ихъ вещественнымъ воплощеніемъ. Какъ бы мы ни старались, какъ бы тонки и усовершенствованы ни были наши инструменты, мы не можемъ льстить себѣ надеждой получить поверхности безъ толщины, линіи безъ ширины, точки лишенныя измѣреній. А между тѣмъ нашему уму, при помощи абстракціи, удалось постигнуть эти предметы и особенно пользоваться ими. Равнымъ образомъ мы не вправѣ утверждать существованія абсолютной непрерывности тѣлъ самыхъ плотныхъ. Относительно такихъ тѣлъ мы не знаемъ напередъ (какъ относительно пространства) и независимо отъ всякаго опыта, что въ нихъ нѣтъ разрывовъ непрерывности. Объ этомъ мы знаемъ такъ мало, что современная наука доказываетъ даже противное. Она установила при помощи наглядныхъ фактовъ, что всякое тѣло, жидкое или твердое, можетъ быть сжато подъ дѣйствіемъ достаточной силы. Съ другой стороны химія считаетъ послѣднія составныя частицы тѣлъ недѣлимыми. Вслѣдствіе этого, приходится предположить, для объясненія наблюдаемаго уменьшенія объема, что эти послѣднія составныя частицы тѣла при сжатіи тѣла приближаются однѣ къ другимъ. Матерія, слѣдовательно, не даетъ намъ сама по себѣ прототипа этой совершенной, идеальной, абсолютной непрерывности, которая существуетъ въ нашемъ умѣ и которая намъ кажется естественно осуществленной въ пространствѣ и во времени.

Время не только непрерывно на подобіе пространства, но оно проходитъ или течетъ, и это прохожденіе или теченіе его внушаетъ намъ идею непрерывнаго роста или увеличенія.

Къ идеѣ увеличенія геометры тотчасъ же прибавляютъ противоположную идею, т. е. уменьшенія, и для выраженія той и другой они выбрали общій терминъ *„измѣненіе“* или *„варіація“* (variation). Время, слѣдовательно, даетъ намъ идею непрерывнаго измѣненія.

Это именно и составляетъ одно изъ самыхъ плодотворныхъ понятій въ математикѣ. Аналитическая Геометрія всецѣло основана на немъ: удивительное открытіе Декарта предполагаетъ непрерывное измѣненіе координатъ кривой. Уже тригонометрія освоила умы съ синусами и косинусами, возрастающими или уменьшающимися въ предѣлахъ между нулемъ и длиною радіуса, а также съ тангенсами, растущими или уменьшающимися между нулемъ и безконечностью, смотря по амплитудѣ соотвѣтствующихъ имъ угловъ. Механика, съ своей стороны, показываетъ намъ движенія то ускоряющіяся, то замедляющіяся непрерывно. Описываемые пути увеличиваются прогрессивно до тѣхъ поръ, пока не произойдетъ полной остановки движущагося тѣла и совершеннаго уничтоженія его скорости, уменьшающейся незамѣтно вслѣдствіе сопротивленія среды.

Скажемъ лучше, что можетъ быть нѣтъ ни одного геометрическаго или механическаго свойства, которое не представлялось бы намъ подъ видомъ величины или которое не могло бы быть представлено величиной, способной къ непрерывному измѣненію. Взаимное наклоненіе двухъ прямыхъ, направленіе и кривизна линіи въ ея различныхъ точкахъ, интенсивность центробѣжной силы, площади, описанныя радіусами векторами тѣлъ, движущихся подъ дѣйствіемъ центральной силы, точно также представляютъ собою количества, ростъ которыхъ или уменьшеніе непрерывно. Варіаціи зависятъ отъ положенія точки и отъ выбора момента. Геометрическія фигуры, линіи, поверхности и объемы своей непрерывностью обязаны пространству. Движенія же непрерывны, благодаря и времени, и пространству.

Непрерывность не могла не послужить для математиковъ предметомъ къ обобщенію, аналогичному съ обобщеніемъ самой величины. Такъ какъ они оставили геометрическія величины, чтобы обратиться въ Алгебрѣ къ разсмотрѣнію величинъ чисто-абстрактныхъ, то предположили, что и эти по-

слѣднія измѣняются непрерывно. Къ тому же предположеніе это было совершенно основательно, такъ какъ отвлеченныя величины могутъ быть всегда представлены при помощи величинъ геометрическихъ [1]).

Наконецъ, непрерывность измѣненій алгебраическаго количества привела математиковъ къ непрерывности измѣненій функцій, кульминаціонной точкѣ, рѣшительному моменту въ вѣковомъ прогрессѣ математическихъ наукъ.

Уравненіемъ, какъ извѣстно, называется отношеніе между двумя количествами, позволяющее опредѣлить величины одного при помощи величинъ другого, и наоборотъ. Два количества, связанныя, такимъ образомъ, алгебраической или аналитической формулой, получили одно по отношенію къ другому названіе *функціи.* Площадь круга и его радіусъ, пространство, пройденное свободно падающимъ тѣломъ въ пустотѣ, и время его паденія; количество воды, испарившейся въ кипятильникѣ, и количество израсходованнаго на это угля, всѣ подобнаго рода количества суть функціи одно другого, потому что длина радіуса опредѣляетъ площадь круга, время паденія даетъ высоту его, а количество сгорѣвшаго угля соотвѣтствуетъ количеству превратившейся въ паръ воды.

Я говорю лишь о функціяхъ, которыя могутъ быть выражены алгебраически. Впрочемъ, мы знаемъ множество такихъ отношеній въ природѣ, которыхъ мы не умѣемъ выразить математически. Существованіе ихъ не подлежитъ сомнѣнію, но вслѣдствіе неопредѣленности ихъ формы я оставляю отношенія эти внѣ нашего разсмотрѣнія. Я имѣю въ виду исключительно функціи, выражающіяся аналитическими уравненіями, допускающими рѣшеніе относительно того или другого изъ этихъ количествъ. Значеніе одного изъ нихъ опредѣлится, такимъ образомъ, при помощи значенія, приписываемаго другому. Я говорю *другому*, но я могъ бы сказать *другимъ*; потому что нѣтъ ничего невозможнаго въ установленіи уравненія между тремя и даже большимъ числомъ количествъ. Объемъ прямого конуса есть въ одно и то же время функція радіуса основанія и высоты; путь, пройденный пушечнымъ ядромъ, представляетъ собою

[1]) Я не разсматриваю здѣсь мнимыхъ количествъ, которыя, въ сущности, суть количества дѣйствительныя, снабженныя символомъ мнимости. Символъ этотъ является какъ бы постояннымъ коэффиціентомъ для того, чтобы придать дѣйствительнымъ количествамъ спеціальное значеніе. Но эти послѣднія, безъ отношенія къ ихъ символу, подчиняются тѣмъ же законамъ, что и количества обыкновенныя.

функцію, одновременно, начальной скорости, напряженія тяжести и сопротивленія воздуха. Если я упоминаю только о двухъ количествахъ или о двухъ *перемѣнныхъ*, то лишь съ цѣлью упрощенія рѣчи; но разсужденія остаются тѣми же самыми и относительно нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Великая математическая концепція, выясненная Декартомъ, состоитъ вотъ въ чемъ:

Если два количества связаны между собою аналитическимъ уравненіемъ, то они измѣняются непрерывно, какъ то, такъ и другое. Другими словами, если одна изъ величинъ измѣняется непрерывно, то функція, которая выражаетъ значеніе другой, измѣняется такъ же непрерывно.

Истина этого принципа вытекаетъ съ очевидностью изъ природы тѣхъ дѣйствій, которыми занимается геометръ. Этотъ послѣдній въ самыхъ сложныхъ комбинаціяхъ приходитъ, наконецъ, къ небольшому числу несводимыхъ на другія функцій, являющихся какъ бы первыми матеріалами, необходимыми элементами самыхъ сложныхъ его формулъ. Въ этомъ случаѣ онъ подражаетъ химику или, скорѣе, природѣ, которая создаетъ въ минеральномъ и органическомъ царствѣ громадное разнообразіе продуктовъ при помощи нѣсколькихъ простыхъ тѣлъ. Простыя тѣла геометра, если я могу такъ выразиться, его основныя дѣйствія, его *алгориѳмы*, какъ ихъ называютъ, составляютъ менѣе обширную таблицу, чѣмъ химическая. Едва можно насчитать двѣнадцать въ самомъ дѣлѣ различныхъ дѣйствій; да и изъ этихъ, если съ ними познакомиться поближе, пожалуй, можно бы и еще исключить нѣкоторыя, обладающія довольно спорнымъ аналитическимъ характеромъ. Эти алгориѳмы извѣстны всѣмъ и каждому, а именно: сложеніе съ обратнымъ ему дѣйствіемъ, вычитаніемъ; умноженіе съ обратнымъ дѣйствіемъ, дѣленіемъ; возвышеніе въ степень съ обратнымъ дѣйствіемъ, извлеченіемъ корней, отношеніе показательное съ обратнымъ ему логариѳмическимъ; наконецъ, различныя отношенія или функціи заимствованныя изъ геометріи: круговыя или тригонометрическія, эллиптическія и т. д., о которыхъ я не буду распространяться.

Характеръ непрерывности сложенія и вычитанія, или увеличенія и уменьшенія, не требуетъ доказательства. Непрерывность умноженія точно такъ же очевидна: можно всегда взять одинъ изъ множителей настолько малой величины, что все произведеніе сдѣлается менѣе всякаго даннаго числа. Точно также можно заставить измѣняться дѣлителя такъ незамѣтно, что эти измѣненія почти не будутъ

отражаться на величинѣ частнаго. То же самое замѣчаніе относится и къ показательной и логариѳмической функціямъ: можно всегда заставить измѣняться какъ угодно мало значеніе функціи, производя весьма малыя измѣненія въ величинѣ показателя или логариѳма. Наконецъ, отношенія, опредѣляемыя тригонометрическими, эллиптическими или другими линіями точно также способны къ непрерывнымъ измѣненіямъ. Отсюда слѣдуетъ, что всѣ комбинаціи геометра, уже вслѣдствіе одного того, что онѣ разлагаются напростыя функціи, непрерывныя каждая въ отдѣльности, въ свою очередь непрерывны во всемъ ихъ цѣломъ. Потому что эти комбинаціи образуются по необходимости путемъ совокупленія, соединенія и слiянія простыхъ функцій при помощи способовъ, подобныхъ тѣмъ самымъ, которыя представляются простыми функціями. А эти способы не нарушаютъ непрерывности. Слѣдовательно, аналитическая функція въ самомъ общемъ ея видѣ непрерывна, такъ же точно, какъ и опредѣляющая ее перемѣнная.

Здѣсь слѣдуетъ указать на одно исключеніе; читатель уже замѣтилъ его. Дѣленіе можетъ достигнуть такого предѣла, гдѣ всякое понятіе о непрерывности исчезаетъ: когда дѣлитель дѣлается нулемъ, и когда частное, слѣдовательно, принимаетъ значеніе безконечности. Въ это, именно, мгновеніе непрерывность утрачиваетъ свой смыслъ. Какая непрерывность можетъ тутъ быть между безконечнымъ и тѣмъ, что ему предшествуетъ? Къ счастію для геометра, ему опять помогаетъ непосредственное воззрѣніе на безконечность. Оно показываетъ ему, что задача нуждается въ особенномъ толкованіи, и даетъ ему средство дополнить понятіе о непрерывности, сдѣлавшееся вдругъ неудобопримѣнимымъ. Оставаясь конечной до извѣстнаго момента и послѣ него, величина остается безконечной одинъ лишь мигъ. Наклонная линія становится параллельной и тотчасъ же, если ее продолжаютъ наклонять, принимаетъ наклонное положеніе, но уже въ обратную сторону. Тригонометрическій тангенсъ дѣлается безконечнымъ, когда уголъ его строго равенъ прямому, затѣмъ, тотчасъ же, при малѣйшемъ измѣненіи угла онъ снова дѣлается конечнымъ, но въ значеніи, противоположномъ предыдущему: величина его становится отрицательной.

Непрерывное и безконечное представляютъ собою, слѣдовательно, двѣ исключающія одна другую идеи. За предѣлами непрерывнаго есть одинъ моментъ, гдѣ конечное усколь-

заетъ отъ насъ; величина измѣняетъ состояніе, если можно позволить себѣ эту, заимствованную у физики, метафору. Безконечное служитъ какъ-бы барьеромъ непрерывнаго, но барьеромъ безконечно тонкимъ, по другую сторону котораго непрерывное возобновляется, и лишь принимаетъ отрицательную или даже мнимую форму.

Слѣдствіемъ непрерывности или непрерывнаго роста является возможность неопредѣленнаго дѣленія величинъ, или, какъ это принято говорить, *дѣлимость до безконечности.* Въ самомъ дѣлѣ, какимъ образомъ понять границу дѣленія непрерывной величины? Какъ представить себѣ въ случаѣ количества, всегда подобнаго самому себѣ, возможность достигнуть такой части, которую нельзя было бы въ свою очередь раздѣлить снова? Само собой разумѣется, что я говорю здѣсь о дѣленіи теоретическомъ, а не практическомъ, ограниченномъ, по необходимости, слабостью нашихъ органовъ и несовершенствомъ инструментовъ. Дѣленіе до безконечности есть результатъ умозрѣнія, аналогичный различенію геометрическихъ фигуръ. Оно относится лишь къ количествамъ, обладающимъ совершенной непрерывностью, какъ пространство и время, или количествамъ, которымъ мы навязали это свойство, какъ абстрактныя алгебраическія величины. Понимаемое такимъ образомъ дѣленіе до безконечности можетъ увеличить число аксіомъ, которыми начинается геометрія Эвклида. Сказать о прямой, что она непрерывна, или дѣлима неопредѣленнымъ образомъ, или что она только одна и можетъ быть проведена между двумя данными точками, значитъ высказать истины одного и того же порядка. Можетъ быть, преподаваніе математики выиграло бы, если бы мы ихъ вовсе не раздѣляли, вмѣсто того, чтобы откладывать сообщеніе одной изъ нихъ, какъ будто бы она менѣе очевидна.

Паскаль въ своихъ незабвенныхъ „*Размышленіяхъ о геометріи вообще*“ [1]) посвятилъ дѣленію пространства до неопредѣленности слѣдующія строки, сдѣлавшіяся классическими:

„Наконецъ, какое-либо пространство, какъ бы ни было оно мало, не можетъ ли быть раздѣлено пополамъ, а полученныя половины еще пополамъ? И какимъ бы образомъ могло случиться, что эти половины оказались бы недѣлимыми, безъ всякаго протяженія, а совокупность ихъ, все-таки, давала бы первоначальное протяженіе?

---

[1]) Pensées de Blaise Pascal, article II.

„У человѣка нѣтъ полученнаго естественнымъ путемъ знанія, которое было бы первичнѣе этого и превосходило бы его по ясности. Тѣмъ не менѣе, чтобы имѣть примѣры всякаго рода вещей, мы встрѣчаемъ умы, превосходные во всѣхъ другихъ областяхъ, которыхъ смущаютъ эти безконечности, и которые не могутъ никоимъ образомъ согласиться признать ихъ.

„Я не зналъ никого, кто бы думалъ, что пространство не можетъ быть увеличено. Но я встрѣчалъ нѣсколькихъ, и притомъ очень остроумныхъ людей, которые утверждали, какъ это ни нелѣпо, что пространство можетъ быть раздѣлено на двѣ недѣлимыя части.

„Я старался открыть въ нихъ причину этого затменія и нашелъ, что самая главная была только одна, а именно, что они не могли понять безконечной дѣлимости непрерывнаго, откуда они и заключили, что оно такимъ образомъ и не дѣлится. Человѣку свойственно естественное заблужденіе, состоящее въ томъ, что онъ вѣритъ, будто обладаетъ истиной непосредственно; отсюда происходитъ, что онъ всегда расположенъ отрицать все для него непонятное; между тѣмъ какъ въ дѣйствительности онъ видитъ естественнымъ путемъ только призрачное и долженъ принимать за истинныя лишь тѣ вещи, которыхъ противоположность ему кажется ложной.

„И вотъ почему всякій разъ, какъ предложеніе является непонятнымъ, слѣдуетъ воздержаться отъ сужденія о немъ, и не отрицать его на основаніи одного только этого признака, а изслѣдовать противоположое ему предложеніе и если ложность этого послѣдняго окажется очевидной, то можно будетъ смѣло утверждать справедливость перваго, какъ бы оно ни казалось непонятнымъ. Приложимъ это правило къ предмету нашего разсужденія.

„Нѣтъ геометра, который бы не вѣрилъ въ безконечную дѣлимость пространства. Безъ этого принципа нельзя быть геометромъ, точно такъ же, какъ нельзя быть человѣкомъ, не имѣя души. И тѣмъ не менѣе, никто не можетъ понять безконечности дѣленія; и въ этой истинѣ удостовѣряются лишь на одномъ только основаніи, но котораго, конечно, достаточно, а именно—совершенно понятна ложность предположенія, будто при дѣленіи пространства можно достигнуть частей недѣлимыхъ, т. е не имѣющихъ измѣренія. Потому что, что же можетъ быть болѣе абсурднаго, какъ не предположеніе, что, дѣля постоянно пространство, наконецъ

доходятъ до такого дѣленія, части котораго будутъ уже недѣлимыя, т. е. безъ всякаго измѣренія?..

„Тѣ, которыхъ не удовлетворятъ эти основанія, и которые останутся при взглядѣ, что пространство не дѣлимо до безконечности, не могутъ ничего ждать отъ геометрическихъ доказательствъ; и какъ бы они ни были просвѣщенны въ другихъ вещахъ, ихъ просвѣщеніе въ этой наукѣ будетъ весьма мало; потому что можно легко быть очень остроумнымъ человѣкомъ и плохимъ геометромъ“.

Можно удивляться, что такая ясная идея была предметомъ споровъ не только во время Паскаля, но и послѣ него. Въ наше время еще находятся люди, которые называютъ *антиноміей* разума невозможность постигнуть то дѣленіе до безконечности, то конечное дѣленіе. Каждое изъ этихъ утвержденій вызываетъ, по ихъ словамъ, неизбѣжное противорѣчіе, такъ что умъ воздерживается отъ рѣшительнаго сужденія относительно нихъ.

Тайна этой предполагаемой антиноміи разума заключается, по моему мнѣнію, особенно въ смѣшеніи терминовъ. Не дѣлаютъ точнаго различія между непрерывными количествами, принадлежащими области чистой математики, и количествами изъ области физики. По отношенію къ первымъ не можетъ быть колебанія, ничто не въ состояніи затмить ясныхъ размышленій Паскаля; дѣленіе до безконечности не только понятно, но и необходимо. Что же касается количествъ изъ области физическаго міра, то это другого рода вопросъ. Матерія не непрерывна. Неопредѣленное дѣленіе можетъ, слѣдовательно, касаться только послѣднихъ частицъ количествъ физическаго порядка, тѣхъ, которыя химикъ признаетъ несводимыми къ другимъ, а потому и недѣлимыми. Но въ самомъ ли дѣлѣ эти частицы несводимы къ другимъ, и неужели никакая физическая или химическая сила не можетъ произвести ихъ дѣленія? Никто не знаетъ этого положительно. За отсутствіемъ прямого доказательства, химики приводятъ въ подтвержденіе своего мнѣнія два значительныхъ факта.

Первый состоитъ въ томъ, что множество элементовъ сохраняютъ свои специфическія свойства при всѣхъ дѣйствіяхъ, которымъ они подвергаются. Будутъ ли эти элементы виды вещества дѣйствительно различные между собою, настоящія *простыя тѣла*, или же они происходятъ изъ прочныхъ группировокъ одного и того же первообразнаго элемента, мы тѣмъ не менѣе имѣемъ дѣло съ матеріалами,

обладающими собственной индивидуальностью, потому что она сохраняется послѣ всѣхъ преобразованій, которыя ее маскировали короткое время. Элементъ или атомъ—дѣло не въ названіи—желѣза, серебра, угля, кислорода, вступившій въ самыя разнообразныя соединенія можетъ, какъ извѣстно, всегда быть отысканъ со своими отличительными признаками и играть снова ту же самую роль.

Величайшія силы природы, повидимому, не въ состояніи уничтожить этихъ признаковъ или разрушить этихъ группировокъ. Потому что спектральный анализъ обнаруживаетъ присутствіе тѣхъ же элементовъ на отдаленныхъ свѣтилахъ, гдѣ условія температуры и давленія, однако, такъ различны отъ тѣхъ же условій въ нашихъ лабораторіяхъ. Въ виду этой несокрушимой устойчивости, мы съ трудомъ можемъ предположить, чтобы матерія при своемъ дѣленіи не останавливалась на опредѣленной ступени, чтобы отличительныя свойства, въ которыя она облекается, не принадлежали чему-нибудь неизмѣнному. Дѣленіе до неопредѣленности, каково, напр., дѣленіе геометрическихъ величинъ, доходящее до ихъ безпредѣльнаго уменьшенія, плохо согласуется въ нашемъ умѣ съ полнымъ сохраненіемъ начальныхъ свойствъ матеріи и съ возможностью заставить ихъ обнаружиться во всякое время.

Второй фактъ, которому нашъ великій химикъ Реньо приписывалъ чрезвычайную важность, состоитъ въ томъ, что тѣла соединяются въ опредѣленныхъ пропорціяхъ. „Этотъ фактъ, говорилъ онъ, вполнѣ подтвержденный опытомъ, служитъ главнымъ доказательствомъ, къ которому мы прибѣгаемъ, когда хотимъ установить свойства дѣлимости матеріи до извѣстнаго предѣла и существованія недѣлимыхъ молекулъ. Опытъ показываетъ даже, что самыя простыя отношенія представляются чаще всего; такъ, въ сложныхъ тѣлахъ встрѣчаютъ обыкновенно отношенія 1 къ 2, 1 къ 3, 1 къ 4, 1 къ 5, или 2 къ 3, 2 къ 5, 2 къ 7“ [1]). Со времени Реньо, химія произвела соединенія, въ которыхъ числа далеко не такъ просты. Но отношенія остаются соизмѣримыми, и аргументъ сохраняетъ свое значеніе. Какъ понять постоянство въ соединеніяхъ, если бы количества, о которыхъ идетъ рѣчь, не заключали въ себѣ точнаго числа элементовъ несводимыхъ къ другимъ?

Нѣкоторыя школы въ древности, хотя и не производили

---

[1]) *Cours Chimie*, 2-e edition, p. 6.

научныхъ опытовъ, тѣмъ не менѣе пришли къ тому же заключенію путемъ апріористическаго разсужденія. По мнѣнію Демокрита и впослѣдствіи Эпикура, „пространство вселенной заполнено атомами, различающимися между собою формой, порядкомъ, положеніемъ, причемъ различными группировками этихъ атомовъ объясняется все существующее“. Нельзя не удивляться такой проницательности, доходящей до пророческаго дара. Потому что современная химія не только была приведена къ признанію атомовъ, предчувствованныхъ Демокритомъ, но она даже задается вопросомъ, не существуетъ ли въ дѣйствительности то единство матеріи, предположеніе о которомъ существовало въ идеѣ греческаго философа. Не сводится ли множественность веществъ ко множественности „сочетаній“ или группировокъ?

Въ заключеніе, ограниченная дѣлимость матеріи не противорѣчитъ разуму; она даже кажется вполнѣ вѣроятной, какъ въ томъ случаѣ, если существуетъ нѣсколько видовъ матеріи, такъ и въ томъ, если существуетъ только одинъ ея видъ Наоборотъ, безконечная дѣлимость математическихъ величинъ, пространства и времени въ одно и то же время и несомнѣнна, и необходима. Не только разумъ не отказывается принять то или другое утвержденіе, подъ предлогомъ неразрѣшимаго противорѣчія, но онъ допускаетъ ихъ оба разомъ и дѣлаетъ это безъ труда, потому что они имѣютъ въ виду предметы различнаго рода по природѣ. Ему нечего бояться никакой антиноміи, потому что оба эти утвержденія, образовавшись въ порядкѣ идей, развивающихся параллельно, совершенно не рискуютъ встрѣтиться и взаимно уничтожить одно другое.

ГЛАВА IV.

Безконечно малыя количества.

Дѣленіе до безконечности приводитъ насъ къ количествамъ постепенно уменьшающимся, *исчезающимъ* (*évanouissantes*), какъ говорятъ геометры, такимъ, степень малости которыхъ ускользаетъ отъ всякаго опредѣленія, потому что при помощи новыхъ дѣленій эта степень, какъ бы далеко мы ее ни брали въ ряду послѣдовательно убывающихъ количествъ, всегда можетъ быть достигнута, и даже превзойдена.

Предположимъ для лучшаго уясненія предмета, что этотъ способъ примѣняется къ опредѣленной длинѣ, къ нѣкоторой конечной части прямой линіи. Часть эта сначала дѣлится пополамъ, потомъ каждая половина пополамъ и такъ дальше до безконечности. Длины этихъ частей будутъ изображаться послѣдовательно на каждой ступени дѣленія дробями: половина, четверть, восьмая, шестнадцатая и т. д Ни на одномъ изъ членовъ этого нисходящаго ряда нельзя остановиться, какъ на послѣднемъ, потому что соотвѣтствующая ему длина можетъ, въ свою очередь, быть раздѣлена пополамъ, что уже доставитъ слѣдующій членъ. Геометрія и ариѳметика въ этомъ дѣленіи до безконечности обнаруживаютъ полное согласіе: одна, практикуя его на длинахъ, другая—на отвлеченныхъ величинахъ.

Въ то время, какъ каждая новая часть изображается все меньшей и меньшей дробью, число этихъ частей все больше и больше растетъ. Оно выражается послѣдовательно цифрами: два, четыре, восемь, шестнадцать и т. д., причемъ невозможно остановиться ни на одномъ членѣ, какъ на послѣднемъ въ этомъ восходящемъ ряду. Въ этомъ случаѣ мы, по словамъ Паскаля, находимся между двумя крайними величинами, одна изъ нихъ есть *ничто*, а другая *безконечность*.

Ни тотъ, ни другой изъ этихъ крайнихъ предѣловъ не могутъ быть достигнуты. Какъ бы мы ни увеличивали число послѣдовательныхъ дѣленій, число частей никогда не сдѣлается безконечнымъ. Мы можемъ дѣлить сколько угодно каждую новую часть и, однако, не дойдемъ до нуля. Самыя малыя части всегда сохраняютъ признакъ величины, потому что, если ихъ соединить вмѣстѣ, сложить конецъ съ концомъ, то онѣ должны будутъ возстановить данную длину. Безусловные же нули, въ какомъ бы громадномъ количествѣ мы ихъ ни брали, никогда не дадутъ въ результатѣ конечной величины.

Свойство исчезающихъ величинъ заключается, слѣдовательно, въ ихъ способности становиться менѣе всякой данной величины—какъ угодно малой,—и въ то же время никогда не достигать дѣйствительнаго нуля. Онѣ подходятъ къ нулю, но никогда не сливаются съ нимъ. Этимъ онѣ отличаются отъ количествъ, получаемыхъ помощью вычитанія или разности, которыя уменьшаются по мѣрѣ увеличенія вычитаемаго и становятся нулями, когда вычитаемое равняется данному количеству. Вотъ, напримѣръ, движу-

щееся тѣло, скорость котораго постепенно замедляется вслѣдствіе сопротивленія окружающей среды. Въ каждое мгновеніе сохранившаяся скорость равна разности между начальной и той, которая уничтожена препятствіями. Она постепенно слабѣетъ, и, наконецъ, движущееся тѣло останавливается, когда уничтожающаяся скорость строго равна скорости начальной. Если движущееся тѣло пробѣгаетъ окружность, то дуга, которую ему остается описать, чтобы прійти въ точку отправленія, постепенно уменьшается и, наконецъ, уничтожается совершенно, представляя собою разность между цѣлой окружностью и пройденной движущимся тѣломъ дугой (т. е. той же самой окружностью). Эти уменьшающіяся количества не имѣютъ никакого соотношенія съ результатами повторнаго дѣленія или съ *аликвотными частями*, всегда способными возстановить первоначальную величину. Послѣднія только и интересуютъ геометра; онѣ-то и получили названіе *безконечно малыхъ* величинъ.

Это наименованіе, истинный смыслъ котораго выражается терминомъ „*неопредѣленно уменьшающееся*“, имѣетъ цѣлью напомнить, что количество никогда не исчерпываетъ своей способности къ уменьшенію, но что послѣ долгаго уменьшенія оно можетъ уменьшаться еще дальше, не достигая, впрочемъ, никогда того послѣдняго конца, который называется нулемъ. Количества будутъ неопредѣленно малыми, но они, все-таки, не прекратятъ своего существованія. Они служатъ уменьшеннымъ видомъ тѣхъ количествъ, отъ которыхъ произошли. Они представляютъ ихъ образы все болѣе и болѣе уменьшающіеся, подобные получаемымъ при разсмотрѣніи предметовъ черезъ стекла, отодвигающія отъ насъ все дальше и дальше объекты зрѣнія.

Каждая непрерывная величина обладаетъ соотвѣтствующимъ ей безконечно малымъ значеніемъ. Прямая линія имѣетъ свою безконечно малую прямолинейную. Кривая—безконечно малую криволинейную величину. Поверхность—безконечно малую величину, тоже поверхность—плоскую или кривую, смотря по характеру данной поверхности. Сила, скорость, время имѣютъ соотвѣтствующія имъ безконечно малыя величины, которыя въ свою очередь будутъ также силой, скоростью, временемъ, только безконечно малыми. Каждая безконечно малая величина принадлежитъ къ тому же роду, какъ и то количество, отъ котораго она произошла; иначе и быть не можетъ, потому что безконечно малое (не слѣдуетъ никогда этого забывать) будучи повто-

рено извѣстное число разъ, воспроизводитъ количество, отъ котораго оно произошло. Оно походитъ въ этомъ отношеніи на обыкновенную дробь, отъ которой отличается лишь измѣреніемъ, сдѣлавшимся для насъ незамѣтнымъ и даже непостижимымъ, потому что дѣлитель превосходитъ здѣсь всѣ числа, которыя могутъ быть формулированы.

Мы имѣли бы странную идею о безконечно малыхъ, если бы вообразили, что, по мѣрѣ своего уменьшенія, они становятся между собою тождественными и что въ извѣстный моментъ они совершенно перестаютъ отличаться одни отъ другихъ. Напротивъ, они носятъ неизгладимую печать своего происхожденія. Безконечно малое линіи нельзя смѣшать съ безконечно малымъ поверхности. Безконечно малое силы невозможно принять за безконечно малое времени. Надо предвидѣть одну только случайность, а именно—безконечно малыя, близкія по своему началу, каковы всѣ безконечно малыя линейныя (я не скажу, чтобы они становились одинаковыми—этого никогда не можетъ быть) могутъ настолько приблизиться одни къ другимъ, что разность между ними сдѣлается безконечно малой сравнительно съ ихъ собственной величиной. Безконечно малое прямолинейное и безконечно малое криволинейное, напримѣръ, могутъ различаться одно отъ другого не только на безконечно малую величину самое по себѣ—на нее-то они всегда различаются,—но на безконечно малую величину сравнительно съ ними самими или безконечно малую величину вдвойнѣ. Двѣ безконечно малыя величины поверхности, одна плоская, а другая кривая, могутъ имѣть подобное же различіе. То же самое относится и къ двумъ безконечно малымъ величинамъ,—одной, происходящей отъ постоянной силы, а другой—отъ силы перемѣнной.

Это сближеніе, эта внутренняя близость невозможны для тѣхъ безконечно малыхъ величинъ, между которыми природа вещей установила постоянную преграду,—различіе, котораго ничто не можетъ уменьшить. Безконечно малое линіи и безконечно малое объема, безконечно малое силы и безконечно малое времени нельзя сравнивать между собою. Между ними нѣтъ ни большой, ни малой разницы. Они принадлежатъ къ различному роду понятій. Безконечно малыя, способныя къ сближенію, должны, прежде всего, быть однородными,—я разумѣю подъ этимъ—принадлежать къ одному и тому же семейству и обладать извѣстными общими отличительными признаками. Прямая и кривая ли-

ніи, несмотря на ихъ различное происхожденіе, имѣютъ общее свойство, именно - ихъ одномѣрность, которое позволяетъ поставить ихъ въ одну и ту же категорію и дѣлаетъ возможнымъ сближеніе ихъ безконечно малыхъ частей. Не нужно быть геометромъ, чтобы разобраться въ этомъ, тутъ достаточно здраваго смысла. Всякій согласится, не колеблясь, что окружность круга заключается между периметрами многоугольниковъ вписаннаго и описаннаго; но никто не скажетъ, чтобы поверхность шара заключалась между тѣми же самыми многоугольниками. Никто не станетъ утверждать, чтобы безконечно малое объема и безконечно малое силы стремились къ совпаденію, несмотря на то, что и то, и другое приближаются къ нулю.

Конечныя величины классифицируются алгебраистами сообразно числу ихъ измѣреній или *степени*, въ которой онѣ входятъ въ уравненія. Линіи, поверхности, объемы будутъ соотвѣтственно: первой, второй, третьей степени. Степени, высшія третьей, не имѣютъ спеціальнаго значенія, по крайней мѣрѣ, въ обыкновенной геометріи, признающей только три измѣренія. Степени указываютъ, сколько приходится произвести ариѳметическихъ или алгебраическихъ дѣйствій.

Слѣдуетъ даже совершенно оставить геометрическія соображенія, касающіяся трехъ первыхъ степеней благодаря историческому происхожденію классификаціи. Надо видѣть въ количествахъ исключительно результаты сравненія или числа (соизмѣримыя или нѣтъ, все равно), иначе говоря, отвлеченныя величины, обладающія непрерывностью и способныя къ безконечному дѣленію. Въ такомъ случаѣ они классифицируются, помимо всякаго конкретнаго ихъ значенія, по степени ихъ или по величинѣ показателя степени, въ которую они должны быть возвышены. Такимъ образомъ, количество, возвышенное въ третью степень, выражаетъ не геометрическій кубъ, а число помноженное дважды само на себя.

Безконечно малыя величины разсматриваются съ той же точки зрѣнія: ихъ классифицируютъ точно такъ же, сообразно съ ихъ степенью. Во всякомъ случаѣ, для того, чтобы отличить эту классификацію отъ классификаціи конечныхъ величинъ, условились замѣнить слово *степень* словомъ *порядокъ*, оставляя при этомъ за нимъ тотъ же самый смыслъ. Безконечно малыя перваго, второго и третьяго порядковъ прежде соотвѣтствовали, какъ и величины конечныя, линіямъ, поверхностямъ и объемамъ. Въ настоящее же время

онѣ имѣютъ одно лишь алгебраическое значеніе, представляя собою просто степени.

Всякое число, большее единицы, даетъ въ произведеніи число большее самого себя, если его возвышаютъ въ квадратъ, и еще большее, если его возвышаютъ въ кубъ, и еще большее, если его возвышаютъ въ четвертую степень. И если это первоначальное число, вмѣсто того, чтобы быть просто бо̀льшимъ единицы, безконечно велико, то его квадратъ будетъ безконечно великъ сравнительно съ нимъ самимъ, его кубъ—безконечно великъ сравнительно съ его квадратомъ и такъ дальше. Наоборотъ, если первоначальное число меньше единицы, его квадратъ будетъ меньше его самого, и его кубъ меньше, чѣмъ его квадратъ. И если, вмѣсто того, чтобы быть просто меньшимъ единицы, оно безконечно мало, то его квадратъ будетъ безконечно малъ сравнительно съ нимъ самимъ, его кубъ—безконечно малъ, сравнительно съ его квадратомъ и такъ далѣе. Степень малости безконечно малой величины измѣряется, слѣдовательно, порядкомъ ея. Вообще, безконечно малое какого-либо порядка, безконечно велико сравнительно съ безконечно малымъ высшаго порядка и безконечно мало сравнительно съ безконечно малымъ порядка низшаго. Безконечно малыя одного и того же порядка находятся между собою въ конечномъ отношеніи, между тѣмъ какъ взаимныя отношенія безконечно малыхъ различныхъ порядковъ то безконечно велики, то безконечно малы. Можно сказать, что величина безконечно малаго количества находится въ обратномъ отношеніи къ его порядку или къ показателю его алгебраической степени.

Слѣдуетъ пріучить себя обращаться съ безконечно малыми величинами такъ же легко и смѣло, какъ съ конечными, отъ которыхъ въ сущности онѣ ничѣмъ и не отличаются, кромѣ своего значенія. Только, вслѣдствіе своей безконечной малости онѣ обнаруживаютъ иногда между собою отношенія, не существующія между величинами конечными, и которыя встрѣчаются. но въ обратномъ видѣ, когда количества безконечно велики. Начертимъ, напримѣръ, кругъ, и къ концу какого-нибудь изъ его радіусовъ проведемъ касательную, которая будетъ перпендикулярна къ радіусу. Потомъ изъ центра его построимъ наклонную къ касательной. Эти три линіи: радіусъ, касательная и наклонная образуютъ прямоугольный треугольникъ, гипотенуза котораго пересѣкается въ нѣкоторой точкѣ окружностью круга. До тѣхъ

поръ пока фигура сохраняетъ свои конечные размѣры, т. е. до тѣхъ поръ пока наклонная не будетъ ни параллельна, ни перпендикулярна къ касательной, всѣ части сохраняютъ между собою конечныя отношенія. А именно, часть гипотенузы между касательной и окружностью и прямая или хорда, соединяющая концы дуги, заключающейся въ треугольникѣ, будутъ находиться въ конечномъ отношеніи. Но если наклонная стремится къ параллелизму съ касательной, то указанная часть гипотенузы сдѣлается безконечно велика сравнительно съ хордой (которая ни въ какомъ случаѣ не можетъ превзойти хорды, соотвѣтствующей дугѣ въ девяносто градусовъ). Если же, напротивъ, наклонная приближается къ радіусу, то часть гипотенузы сдѣлается безконечно малой сравнительно съ хордой, которая, въ свою очередь, станетъ также безконечно мала. Эта часть гипотенузы, будетъ, слѣдовательно, безконечно малой величиной второго порядка, между тѣмъ какъ хорда представляетъ собою безконечно малую величину перваго порядка. Можно было бы увеличить число примѣровъ, и постоянно оказывалось бы то же самое явленіе, не только въ геометрическихъ фигурахъ, а и во всѣхъ родахъ задачъ механики или другихъ наукъ.

Количества, стремящіяся къ нулю, не всѣ уменьшаются съ одинаковой быстротой. У однихъ ходъ этого уменьшенія замедляется, у другихъ ускоряется; многія изъ нихъ прошли уже такой путь въ своемъ уменьшеніи, что дѣлаются незамѣтными по сравненію съ тѣми, которыя за ними слѣдуютъ. Порядокъ величины опредѣляется природой отношеній, существующихъ между различными элементами фигуры или явленія. Этотъ порядокъ не зависитъ отъ геометра; послѣдній констатируетъ его и принимаетъ къ свѣдѣнію.

Паскаль, который, безъ сомнѣнія, сдѣлался бы изобрѣтателемъ вычисленія безконечно малыхъ, если бы религія не похитила его рано у математики, предвидѣлъ трудности, представляемыя понятіемъ о различныхъ порядкахъ этихъ величинъ для нѣкоторыхъ умовъ.

„Наконецъ, говорилъ онъ, если находятъ страннымъ, что маленькое пространство обладаетъ столькими же частями, какъ и большое, то пусть они поймутъ, что части эти и соотвѣтственно меньше, и пусть они посмотрятъ на небесный сводъ сквозь уменьшительное стекло, для того чтобы освоиться съ этимъ представленіемъ, видя каждую часть неба, находящейся въ соотвѣтствіи съ каждою частью стекла.

„Но если они не могутъ понять, что части, столь малыя, что онѣ для насъ незамѣтны, могутъ быть такъ же дѣлимы, какъ и небесный сводъ, то самый лучшій способъ убѣдить ихъ въ возможности такого дѣленія, это—предложить имъ взглянуть въ трубу, увеличивающую едва замѣтную точку до степени чудовищной массы; откуда они легко поймутъ, что при помощи другого, еще болѣе искусно отшлифованнаго стекла можно было бы указанное изображеніе увеличить до равенства съ небеснымъ сводомъ, протяженіе котораго такъ ихъ удивляетъ. И если такимъ образомъ, эти предметы кажутся имъ теперь дѣлимыми весьма легко, то пусть они вспомнятъ, что природа неизмѣримо могущественнѣе всякаго искусства.

„Потому что, наконецъ, кто ихъ увѣрилъ, что эти стекла измѣнятъ естественную величину предметовъ, а не наоборотъ,—не возстановятъ ихъ настоящій видъ, который измѣнила и сократила фигура нашего глаза, подобно тому какъ дѣлаютъ это уменьшительныя стекла? Досадно, говоритъ онъ, оканчивая, останавливаться на этихъ пустякахъ, но и для нихъ должно быть свое время".

Кажется едва вѣроятнымъ, что понятіе о безконечно маломъ могло вызвать столько возраженій. Въ немъ хотѣли видѣть что-то необыкновенное и даже таинственное. Казалось, будто оно противорѣчитъ здравой Геометріи, тогда какъ въ дѣйствительности оно соотвѣтствовало направленію ея естественнаго развитія. Чѣмъ же безконечно малыя менѣе ясны и чѣмъ они менѣе законны, нежели другіе разсматриваемые ею предметы? Съ какой стороны они превосходятъ ихъ по трудности? Развѣ безконечно малое менѣе удобопонятно, чѣмъ поверхность, линія, точка?

Созерцаніе этихъ послѣднихъ предметовъ, или отвлеченіе, производимое элементарной геометріей, предполагаетъ радикальное отнятіе одного или нѣсколькихъ измѣреній. А это, дѣйствительно, требуетъ значительныхъ усилій ума. Понятіе о безконечно маломъ не требуетъ ничего подобнаго. Оно оставляетъ все, какъ есть. Если говорится объ объемѣ—оно сохраняетъ всѣ три измѣренія его. Оно только ихъ въ высшей степени уменьшаетъ, но не уничтожаетъ. Разсматриваютъ ли поверхность,—оно ничуть не увеличиваетъ разъ уже принятой отвлеченности; оно принимаетъ и сохраняетъ два предполагаемыхъ уже измѣренія. Наконецъ, если вопросъ касается линіи, оно ничего не измѣняетъ въ ея идеальномъ строеніи; оно только заставляетъ уменьшиться ея длину.

Единственное новшество, которое оно, повидимому, вводитъ это—измѣняемость. Вмѣсто объемовъ, поверхностей, линій опредѣленныхъ размѣровъ, оно ставитъ величины неопредѣленныя, свойство которыхъ заключается въ томъ, что онѣ ускользаютъ отъ всякаго ограниченія. Но, присматриваясь внимательно, можно видѣть, что инниціатива даже этого понятія принадлежитъ не ему. Оно нашло его въ геометріи древнихъ. Уже Эвклидъ и его послѣдователи разсматривали перемѣнныя величины. Уже они переходили отъ соизмѣримаго къ несоизмѣримому путемъ незамѣтныхъ измѣненій. Они воображали себѣ такіе многоугольники, длина сторонъ которыхъ измѣнялась неопредѣленно. Они изучали эллипсы, форма которыхъ приближалась поочередно то къ кругу, то къ параболѣ, смотря по разстоянію заключающемуся между фокусами.

Понятіе о безконечно маломъ, слѣдовательно, ничуть не туманнѣе и не сложнѣе большей части понятій, опредѣленныхъ первыми геометрами. Въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ его даже легче постигнуть. Если оно и оставляетъ иногда нѣкоторое сомнѣніе въ умахъ, то это зависитъ исключительно, я въ этомъ не сомнѣваюсь, отъ поздняго его появленія въ системѣ образованія. Если бы оно преподавалось вмѣстѣ съ другими основными понятіями, то было бы принимаемо безъ всякаго недовѣрія. Ненужно было бы вовсе длинныхъ объясненій, для сообщенія ему того же характера достовѣрности. Но преувеличенное уваженіе къ исторической традиціи заставляетъ отложить объясненіе понятія о безконечно маломъ и даетъ послѣднему весьма высокое мѣсто въ математической іерархіи. Эта традиція побуждаетъ учениковъ проводить между идеями глубокое различіе, не оправдываемое логикой. Слава Ньютона и Лейбница заключается не въ томъ, что они создали во всѣхъ отношеніяхъ новое понятіе, а въ обнаруженномъ ими умѣніи открыть примѣненія его, сколь многочисленныя, столь же и новыя, и замѣнить общимъ и точнымъ методомъ частные и ненадежные способы. Кромѣ того, они изобрѣли, особенно Лейбницъ, обозначенія и выраженія, весьма облегчившія обращеніе съ новымъ вычисленіемъ.

Лагранжъ, котораго глубокій геній находилъ удовольствіе идти по неизвѣстному пути, предпринялъ трудъ перестроить вычисленіе безконечно малыхъ по совершенно иному взгляду, чѣмъ тотъ, котораго держались Ньютонъ и Лейбницъ. Отсюда возникла его безсмертная „*Теорія аналити-*

ческихъ функцій", которая вмѣстѣ съ „*Аналитической Механикой*" и „*Варіаціоннымъ вычисленіемъ*" отводятъ ему столь высокое мѣсто въ ряду великихъ геометровъ. Однако, существенная идея его новой теоріи была, повидимому, внушена ему нѣсколько неточной оцѣнкой концепціи Лейбница. Вводя безконечно малыя величины, „встрѣчаютъ, говорилъ онъ, весьма большое неудобство въ томъ отношеніи, что приходится разсматривать количества въ состояніи ихъ исчезанія, въ томъ состояніи, когда они перестаютъ, такъ сказать, быть количествами"[1]). Имѣетъ-ли Лагранжъ въ виду, что безконечно малыя лишены реальнаго существованія, что они не встрѣчаются въ природѣ? Никто не можетъ этого оспаривать. Все, что существуетъ,—ограничено и, слѣдовательно, конечно. Но, судя по этому, перемѣнныхъ количествъ такъ же не должно бы существовать; потому что количество, уже потому только, что оно существуетъ, обладаетъ дѣйствительнымъ точнымъ значеніемъ. Одинъ только нашъ разумъ создаетъ понятіе о перемѣнномъ количествѣ, сближая между собою величины сосѣднихъ количествъ и принимая ихъ за послѣдовательныя значенія одного и того же количества. Понятіе о безконечно маломъ принадлежитъ къ тому же порядку; и то, и другое созданы разумомъ. Разумѣлъ ли Лагранжъ просто крайнюю малость предмета, ускользающаго отъ всякаго изслѣдованія? Безконечно малое дѣйствительно незамѣтно для чувствъ, но оно не таково для разума, который все еще видитъ въ немъ количество, несмотря на его неопредѣленное уменьшеніе; точно такъ же, какъ онъ видитъ количества въ линіяхъ, поверхностяхъ, несмотря на отсутствіе одного или нѣсколькихъ измѣреній, сопровождающихъ всегда реальныя линіи и поверхности.

Нельзя не повторить еще разъ, что безконечно или *неопредѣленно* малое никогда не бываетъ нулемъ. По самому опредѣленію своему, находясь внѣ предположенія возможности исчезнуть, оно постоянно сохраняетъ свойства тѣхъ количествъ, отъ которыхъ произошло. Число постепенно уменьшающееся никогда не перестанетъ оставаться числомъ. Дробь, у которой знаменатель постоянно увеличивается, не перестанетъ никогда существовать въ ряду величинъ. „Потому что, какъ говорилъ еще Паскаль, если числа можно всегда увеличивать, то изъ одного этого уже безу-

---

[1]) Théorie des fonctions analytiques, par M. J.-L. Lagrange, 3 éd., p. 4.

словно слѣдуетъ, что ихъ всегда можно также и уменьшать, и это ясно, такъ какъ, если увеличить число, напримѣръ, во сто тысячъ разъ, то можно также взять и его стотысячную часть, раздѣливъ его на то же самое число, на которое раньше умножали; и такимъ образомъ при перемѣнѣ цѣлаго въ дробь всякій членъ умноженія сдѣлается членомъ дѣленія. Такъ что увеличеніе до безконечности неизбѣжно ведетъ за собою также и дѣленіе до безконечности!“

ГЛАВА V.

Предѣлы.

Что такое предѣлъ?

Въ обыкновенной рѣчи предѣломъ называютъ преграду, за которую нельзя переступить. Но эта преграда можетъ быть достигнута, ее можно касаться. На математическомъ же языкѣ словомъ *предѣлъ* называется такая преграда, которой не только нельзя переступить, но которая даже не можетъ быть достигнута. Къ ней лишь можно приближаться. Разстояніе до нее можетъ уменьшаться какъ угодно, никогда, однако, не дѣлаясь нулемъ. Нуль служитъ предѣломъ безконечно малыхъ, которыя къ нему приближаются постоянно, но никогда его не достигаютъ.

Математическій предѣлъ вызываетъ, слѣдовательно, неизбѣжно идею безконечно малаго. Или, скорѣе, безконечно малое необходимо связано съ предѣломъ. Оно указываетъ разстояніе между послѣднимъ и приближающимся къ нему предметомъ. Предѣлъ, къ которому предметъ можетъ приблизиться лишь на опредѣленное разстояніе, не будетъ математическимъ предѣломъ. Не будетъ таковымъ и предѣлъ, который можетъ быть достигнутъ формально, или съ которымъ перемѣнный предметъ можетъ слиться.

Кругъ есть предѣлъ многоугольниковъ вписанныхъ и описанныхъ, число сторонъ которыхъ увеличивается безпредѣльно, потому что разность между многоугольникомъ вписаннымъ и описаннымъ, а, слѣдовательно, и между каждымъ изъ нихъ и заключающимся между ними кругомъ можетъ быть сдѣлана менѣе всякой данной величины. Но кругъ большій или меньшій сравнительно съ тѣмъ, на который опираются многоугольники, не будетъ ихъ предѣломъ;

потому что эти послѣдніе не могутъ къ нему приближаться безгранично. Асимптота къ вѣтви гиперболы будетъ ея предѣломъ, но линія параллельная асимптотѣ не будетъ имъ; потому что, если она будетъ находиться по одну сторону послѣдней, гипербола приблизится къ ней и пересѣчетъ ее; если же она займетъ мѣсто по другую сторону асимптоты, то гипербола всегда будетъ находиться отъ нея въ разстояніи, по крайней мѣрѣ, равномъ разстоянію между асимптотой и параллельной линіей.

Вслѣдствіе обратныхъ причинъ, діаметръ круга не можетъ быть предѣломъ хордъ, потому что ничто не препятствуетъ этимъ послѣднимъ пройти черезъ центръ и сдѣлаться такими же діаметрами. Радіусъ точно также не можетъ быть предѣломъ тригонометрическихъ синусовъ, потому что ничто не препятствуетъ углу сдѣлаться прямымъ, и вслѣдствіе этого синусу слиться съ радіусомъ. Въ этихъ двухъ примѣрахъ линія, неправильно названная *предѣльной*, была бы просто наибольшимъ значеніемъ разсматриваемыхъ предметовъ, точно такъ же, какъ при другихъ условіяхъ она являлась бы ихъ наименьшимъ значеніемъ.

Когда вдумаешься въ опредѣленіе предѣла, становится удивительнымъ тотъ глубокій смыслъ, который продиктовалъ его геометрамъ.

Знакомство съ хордой круга не прибавляетъ ничего новаго къ свойствамъ діаметра, потому что между ними существуетъ тождество по ихъ природѣ и существу. Это просто вопросъ о большемъ или меньшемъ значеніи величины: увеличьте длину хорды—и вы получите діаметръ; уменьшите на извѣстную длину діаметръ, и у васъ будетъ хорда. Изученіе хорды служило бы, слѣдовательно, безполезнымъ обходомъ для ознакомленія съ діаметромъ. Въ частномъ случаѣ можетъ даже представиться, что непосредственное изученіе діаметра будетъ болѣе выгоднымъ, чѣмъ предварительное изученіе хорды, если онъ легче поддается опредѣленію, нежели эта послѣдняя.

Совершенно иначе дѣло обстоитъ съ многоугольникомъ и кругомъ. Эти оба предмета различны между собою по природѣ. Кругъ не есть многоугольникъ съ болѣе или менѣе малыми сторонами; у него нѣтъ вовсе сторонъ. Какъ бы ни было велико число сторонъ многоугольника, онъ никогда не сдѣлается кругомъ, онъ всегда останется многоугольникомъ. Слѣдовательно, многоугольникъ можетъ и долженъ имѣть свойства, отличныя отъ свойства круга. Но,

съ другой стороны, многоугольникъ можетъ, не переставая, приближаться къ кругу, и разность между ними можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго даннаго количества. Отсюда, свойство многоугольника, или выражаемое имъ отношеніе, прилагается къ кругу съ тѣмъ меньшей погрѣшностью, чѣмъ ближе многоугольникъ будетъ находиться къ сліянію съ кругомъ. И если мы умѣемъ выразить условіе, что это сближеніе доведено до степени превышающей всякій данный предѣлъ, то сдѣланная ошибка, уже въ силу одного такого сближенія, становится менѣе всякой конечной величины, иначе говоря, она дѣлается строго равна нулю.

Такова цѣль анализа безконечно малыхъ. Онъ ставитъ себѣ неизмѣнно задачей, употребляя способъ предѣловъ или какой-нибудь другой, аналогичный ему, сопоставить два различные по природѣ предмета: одинъ съ которымъ ознакомленіе возможно, и другой, котораго нѣтъ возможности постигнуть непосредственно. Если эти оба предмета можно сблизить одинъ съ другимъ до взаимнаго сосѣдства, то задача рѣшена. Такимъ образомъ, получается результатъ, повидимому, парадоксальный, а именно, что знакомство съ однимъ предметомъ служитъ для ознакомленія съ другимъ; и именно благодаря тому, что они оба различны по природѣ. Весь секретъ дѣйствія заключается въ возможности ихъ безпредѣльнаго сближенія.

Мы приблизились теперь къ одному изъ самыхъ спорныхъ пунктовъ математическаго анализа. Многіе упрекаютъ способъ предѣловъ за то, что онъ представляетъ собою путь окольный, искусственный и мало способный облегчать пониманіе геометрическихъ истинъ. Что онъ окольный, это правда, потому что прямой путь не велъ бы насъ отъ предмета чуждаго вопросу къ опредѣленію интересующаго насъ предмета. Но какимъ образомъ избѣжать этого? Этотъ путь внушенъ намъ слабостью нашего ума, неспособнаго непосредственно воспринимать свойства всѣхъ вещей. Развѣ вина метода, что мы не схватываемъ съ перваго взгляда отношенія между площадью круга и его радіусомъ, какъ дѣлаемъ это относительно площади прямоугольника и его сторонъ? Это требуется устройствомъ нашего разума. Нельзя называть искусственными или произвольными способы, которые приходятъ на помощь нашей слабости и даютъ намъ возможность переходить отъ предметовъ легко различимыхъ къ тѣмъ, которые трудно различать. Способъ предѣловъ, слѣдовательно, представляетъ собою только способъ

не прямой. Онъ такой же окольный, какъ и масса пріемовъ въ физикѣ, при помощи которыхъ стараются обнаружить дѣйствіе причинъ, ускользающихъ отъ непосредственнаго познанія ихъ.

Но установить на основаніи этого различіе между идеей предѣловъ и идеей безконечно малыхъ для того, чтобы, принявъ одну, отбросить другую, было бы, мнѣ кажется, совершенно нелогично. Въ самомъ дѣлѣ, эти идеи взаимно связаны, соотносительны; онѣ дополняютъ и объясняютъ одна другую. Нѣтъ предѣла безъ безконечно малаго, опредѣляющаго разность; съ другой стороны нѣтъ безконечно малаго безъ предѣла равнаго нулю. Нельзя обойтись безъ понятія о предѣлѣ, не впадая въ рискованную метафизику— какъ это и случилось даже съ самимъ великимъ изобрѣтателемъ вычисленія безконечно малыхъ—или не прибѣгая къ алгебраическимъ выкладкамъ, затемняющимъ видъ самыхъ простыхъ явленій. Нашъ великій Лагранжъ, когда ему пришлось опредѣлять, согласно своему аналитическому методу, скорость перемѣннаго движенія, вывелъ ее изъ разсмотрѣнія многочлена: „Итакъ, вообще, говоритъ онъ, во всѣхъ прямолинейныхъ движеніяхъ, гдѣ пройденное пространство есть данная функція протекшаго времени, функція прима (первая производная) этой функціи будетъ представлять скорость, и функція секунда (вторая производная) представитъ ускоряющую силу въ нѣкоторое мгновеніе... Откуда видно, что функціи прима и секунда естественно встрѣчаются въ механикѣ, гдѣ онѣ обладаютъ опредѣленными величиной и значеніемъ...“ [1]). Какъ будто для знакомства съ понятіемъ о силѣ и скорости необходимо было разложеніе функцій въ строки! Какъ будто эти понятія не находились въ нашемъ умѣ раньше еще изученія алгебры! Какъ будто скорость намъ не кажется выраженной естественно отношеніемъ пройденнаго пространства ко времени, какъ будто въ перемѣнномъ движеніи это выраженіе не представляется намъ тѣмъ болѣе точнымъ, чѣмъ короче промежутокъ времени, и чѣмъ движеніе ближе къ равномѣрности!

Безъ сомнѣнія участіе алгебры необходимо для вычисленія дѣйствительнаго значенія скорости. Но не слѣдуетъ смѣшивать опредѣленіе численнаго значенія съ самой идеей предмета, съ его опредѣленіемъ. Опредѣленіе же, внушаемое намъ здравымъ смысломъ, заключаетъ въ скрытомъ видѣ

---

[1]) Théorie des fonctions analytiques, p. 321.

понятіе о предѣлѣ. Не зная еще, въ состояніи ли мы его опредѣлить, мы уже знаемъ, что онъ существуетъ. Мы понимаемъ, что онъ находится въ отношеніи пройденнаго пространства къ затраченному на это времени, и что наши усилія, съ этихъ поръ, должны быть направлены къ тому, чтобы получить это отношеніе, уменьшая безпредѣльно величину промежутка времени.

Относительно предѣловъ я повторю замѣчаніе, сдѣланное мною по поводу безконечно малыхъ.

Всякій предѣлъ долженъ быть до нѣкоторой степени подобнымъ приближающемуся къ нему перемѣнному предмету. Я говорю подобнымъ не въ смыслѣ тождества, а въ смыслѣ извѣстной однородности. Линія не можетъ быть предѣломъ ни поверхности, ни силы. Линіи служатъ предѣлами линій, поверхности же — предѣлами поверхностей. Силы, промежутки времени, скорости—служатъ предѣлами силъ, промежутковъ времени, скоростей. Между предѣломъ и его перемѣнной величиной должно быть какъ разъ настолько сходства, насколько его требуется для того, чтобы послѣдняя могла неопредѣленно приближаться къ первому, но не настолько—чтобы она могла съ нимъ совпасть. При уклоненіи отъ этого условія въ одну сторону, сближеніе будетъ недостаточно тѣсно, а при уклоненіи въ другую произойдетъ смѣшеніе.

По какому же признаку можно узнать, что извѣстная степень подобія достигнута настолько, насколько это нужно, и не превзошла требованій? Математика, обыкновенно отличающаяся точностью и опредѣленностью, не можетъ не дать отвѣта и на этотъ вопросъ.

Для того, чтобы два предмета не могли никогда прійти къ взаимному совпаденію, необходимо, чтобы въ опредѣленіи одного изъ нихъ былъ одинъ или нѣсколько элементовъ несовмѣстныхъ съ опредѣленіемъ другого. Оба предмета должны быть кореннымъ образомъ, логически различны одинъ отъ другого, и необходимо, чтобы это различіе сохранялось, независимо отъ степени ихъ величины и малости. Прямая и кривая линіи логически различны, такъ какъ опредѣленіе одной предполагаетъ постоянство направленія, которое именно находится въ противорѣчіи съ измѣняемостью направленія другой. Параллельная къ прямой и наклонная къ ней не могутъ совмѣститься; потому что, по опредѣленію, наклонная имѣетъ точку встрѣчи, тогда какъ параллельная ея не имѣетъ; или, что совершенно то же самое, имѣетъ ее только на безко-

нечно большомъ разстояніи. Напротивъ, діаметръ и хорда одного и того же круга могутъ совпадать, такъ какъ ихъ опредѣленія не исключаютъ другъ друга. Хорда опредѣляется какъ часть прямой, заключающаяся внутри пересѣкаемаго ею круга; діаметръ не противорѣчитъ этому опредѣленію. А если опредѣлить хорду, какъ прямую, *не проходящую черезъ центръ*, тогда несовмѣстность ихъ обнаружится, и совпаденіе будетъ невозможно. Слѣдовательно, первое условіе математическаго предѣла заключается въ томъ, чтобы онъ содержалъ въ своемъ опредѣленіи нѣкоторую особенность, несовмѣстную съ опредѣленіемъ перемѣннаго.

Съ другой стороны, что допускаетъ возможность неопредѣленнаго сближенія? Почему оно то возможно, то невозможно? Напримѣръ, эллипсъ можетъ безпредѣльно приближаться къ параболѣ, тогда какъ сближеніе его съ гиперболой невозможно? Что производитъ эту разницу въ отношеніяхъ? Что ставитъ абсолютную преграду между эллипсомъ и гиперболой, тогда какъ эта преграда постепенно уменьшается между эллипсомъ и параболой.

Эллипсъ логически отличается отъ каждаго изъ двухъ названныхъ коническихъ сѣченій, но не одинаковымъ образомъ. Несовмѣстность его опредѣленія съ параболой заключается въ томъ, что у эллипса два фокуса, а у параболы только одинъ. Съ гиперболой же онъ несовмѣстенъ вслѣдствіе того, что сумма разстояній каждой точки эллипса отъ фокусовъ постоянна, тогда какъ у гиперболы она непрерывно увеличивается по мѣрѣ удаленія точки отъ вершины кривой. Слѣдствія этихъ двухъ видовъ несовмѣстности чрезвычайно различны. Если одинъ изъ двухъ фокусовъ эллипса удаляется, то эллипсъ приближается къ параболѣ, и мы видимъ, что онъ стремится къ совпаденію съ ней, когда фокусъ его исчезаетъ въ глубинѣ безконечности; совершенно такъ же, какъ наклонная принимаетъ направленіе параллельной, когда точка встрѣчи ея постоянно удаляется. Наоборотъ, въ случаѣ гиперболы, сколько бы мы ни измѣняли положеніе фокусовъ, форму и величину кривой, сумма разстояній находящейся на ней точки отъ обоихъ фокусовъ будетъ всегда увеличиваться по мѣрѣ удаленія точки отъ вершины. Никакого сближенія съ эллипсомъ тутъ не предвидится; несовмѣстность дѣлаетъ тщетными всѣ попытки сближенія.

Слѣдовательно, существуютъ различія въ опредѣленіи, вліянія которыхъ не одинаковы. Въ одномъ случаѣ несходство между предметами можетъ быть сглажено по желанію;

въ другомъ же оно сохраняется, его никакъ нельзя ослабить. Отсюда слѣдуетъ, что элементъ, указывающій на несовмѣстность между двумя предметами, характерную для нихъ, долженъ въ первомъ случаѣ обладать способностью къ измѣненію, а во второмъ оставаться безъ перемѣны. Такимъ образомъ, когда одинъ предметъ приближается къ другому, принимаемому законнымъ образомъ за предѣлъ перваго, то мы можемъ сдѣлать слѣдующія два заключенія: 1) первый предметъ обладаетъ въ своемъ опредѣленіи элементомъ, несовмѣстнымъ съ соотвѣтствующимъ ему въ опредѣленіи другого предмета; 2) указанный элементъ измѣняется по нашему произволу настолько, насколько это оказывается необходимымъ для совершенно тѣснаго сближенія.

Возможность для перемѣннаго предмета приближаться неопредѣленно къ своему предѣлу зависитъ отъ того, говоримъ мы, что этотъ предметъ заключаетъ въ своемъ опредѣленіи—или въ скрытомъ видѣ, или явно—элементъ, который, вмѣсто того, чтобы оставаться постояннымъ, оказывается способнымъ принимать всѣ оттѣнки измѣненія величины. Такъ какъ кругъ, по опредѣленію, есть предѣлъ многоугольниковъ вписанныхъ или описанныхъ, то эти послѣдніе обладаютъ перемѣннымъ элементомъ, а именно, числомъ сторонъ или длиною каждой изъ нихъ. Если бы этотъ элементъ былъ опредѣленъ заранѣе, то былъ бы возможенъ лишь одинъ многоугольникъ, вмѣсто цѣлаго ряда ихъ, которыми располагаютъ съ цѣлью постояннаго приближенія ихъ къ кругу. Если за предѣлъ наклонныхъ будетъ взята параллельная къ прямой, то въ этомъ случаѣ явится одинъ неопредѣленный элементъ: разстояніе точки встрѣчи наклонной съ прямой. Измѣненіе этого элемента даетъ безчисленное множество наклонныхъ. Если равномѣрное движеніе мы станемъ разсматривать, какъ предѣлъ движенія перемѣннаго, то одинъ элементъ остается неопредѣленнымъ, хотя о немъ и не говорится ясно: это, именно, время, въ продолженіе котораго происходитъ перемѣнное движеніе. Поэтому является возможность, сокращая все болѣе и болѣе этотъ промежутокъ времени, получить такое перемѣнное движеніе, котораго различіе отъ движенія равномѣрнаго будетъ все менѣе и менѣе чувствительнымъ. Говоря вообще, механизмъ способа предѣловъ основывается на явной или скрытой возможности подвергать измѣненію элементъ, выражающій несовмѣстность. Благодаря этой возможности заставить измѣ-

няться разстояніе между двумя предметами, его можно сдѣлать менѣе всякой данной величины.

Въ геометріи большая часть свойствъ представлена посредствомъ линій или поверхностей, способныхъ увеличиваться или уменьшаться. Кривизна, наклоненіе, скорость, ускореніе изображаются при помощи прямыхъ линій, которыя, каждая въ своей области, измѣняются по нашему произволу. Эта неопредѣленность позволяетъ постепенно приближать предметъ къ его предѣлу. Кругъ, по мѣрѣ увеличенія его радіуса, все менѣе и менѣе отличается отъ касательной къ нему линіи. Шаръ, при своемъ увеличеніи, стремится къ совпаденію съ плоскостью, на которой онъ покоится. Эллипсъ, котораго фокальное разстояніе уменьшается, приближается постепенно къ кругу; если же его фокальное разстояніе увеличивается, то онъ приближается къ параболѣ.

Изъ самаго опредѣленія слѣдуетъ, что одинъ и тотъ же перемѣнный предметъ не можетъ приближаться къ двумъ различнымъ предѣламъ, потому что какъ бы мало ни различались между собою эти предѣлы, все же между ними долженъ существовать промежутокъ, выражающійся конечной величиной. Перемѣнная, приближаясь къ одному изъ нихъ, въ то же время находилась бы отъ другого на разстояніи, по крайней мѣрѣ, равномъ предполагаемому промежутку. Она не могла бы, слѣдовательно, приблизиться ко второму предѣлу такъ, чтобы отличаться отъ него на количество меньшее всякой данной величины, какъ того требуетъ общее опредѣленіе. Указанная двойственность была бы призрачна, и въ дѣйствительности оба предѣла образовалибы только одинъ и совершенно слились бы одинъ съ другимъ.

Обратное предложеніе не вѣрно. Одинъ и тотъ же предѣлъ можетъ соотвѣтствовать и не одной только перемѣнной. Нѣсколько перемѣнныхъ предметовъ различнаго происхожденія могутъ стремиться къ одному и тому же предѣлу, въ нѣдрахъ котораго, если бы только они могли его дѣйствительно достигнуть, ихъ различія исчезли бы. Мы знаемъ, что этимъ различіямъ суждено оставаться всегда; только они постепенно ослабѣваютъ, такъ что приходитъ, наконецъ, моментъ, когда эти предметы не различаются уже болѣе между собою на томъ основаніи, что каждый изъ нихъ ужъ не отличается болѣе отъ общаго имъ всѣмъ предѣла. Мы наблюдали это явленіе у безконечно малыхъ. Мы видѣли что всѣ они, несмотря на ихъ различное происхо-

жденіе, стремятся, хотя и не съ одинаковой быстротой, къ уничтоженію. Нуль есть ихъ общій предѣлъ, онъ служитъ предѣломъ какъ для безконечно малыхъ линій, такъ равно для безконечно малыхъ поверхностей, объемовъ, силъ.

Въ области конечныхъ величинъ такого общаго явленія не встрѣчается. Предѣлъ долженъ прежде всего быть однороднымъ съ перемѣнной. При этомъ условіи онъ можетъ сдѣлаться общей цѣлью стремленій множества различныхъ перемѣнныхъ. Кругъ въ такой же мѣрѣ предѣлъ для многоугольниковъ вписанныхъ, какъ и для многоугольниковъ описанныхъ. Кромѣ того, видъ этихъ многоугольниковъ неопредѣленъ; можно было бы безразлично начать съ треугольника и, удваивая число сторонъ, переходить къ шестиугольнику, двѣнадцатиугольнику и т. д или за точку отправленія взять пятиугольникъ, который далъ бы намъ десятиугольникъ, двадцатиугольникъ, сорокаугольникъ и т. д. Всѣ эти виды многоугольниковъ стремились бы одинаково къ кругу. Можно было бы даже взять неправильный многоугольникъ; для этого достаточно было бы лишь, чтобы стороны его опирались на окружность или чтобы онѣ неопредѣленно приближались къ ней, слѣдуя данному закону.

Можно достигнуть, слѣдовательно, одного и того же предѣла совершенно различными путями. Это чрезвычайно важно. Въ самомъ дѣлѣ, если перемѣнная, помощью которой предполагали сперва освѣтить свойства предѣла, не удовлетворяетъ этому требованію, если она кажется слишкомъ сложной, неудобной для обращенія съ нею, то можно оставить ее и замѣнить другою, стремящеюся къ тому же самому предѣлу, но болѣе отвѣчающею своему назначенію. Такъ какъ неправильные многоугольники, напримѣръ, не позволяютъ достигнуть легко познанія свойствъ круга, то ихъ замѣняютъ многоугольниками правильными, стремящимися къ тому же самому предѣлу, но измѣреніе которыхъ гораздо проще и быстрѣе. Геометры часто пользуются этимъ свойствомъ, это даже составляетъ одну изъ самыхъ интересныхъ частей ихъ задачи. Имъ приходится выбирать изъ множества возможныхъ перемѣнныхъ самую подходящую для нихъ систему, и этотъ выборъ оказываетъ рѣшительное вліяніе на результатъ.

Понятіе о предѣлахъ принадлежитъ не исключительно одной математикѣ. Въ этой наукѣ оно нашло для себя лишь наиболѣе точное выраженіе и наиболѣе правильное употребленіе; но оно отвѣчаетъ общей и весьма возвышенной потреб-

ности человѣческаго ума. Во всемъ человѣкъ стремится къ болѣе благородной цѣли, нежели та, которой онъ можетъ достигнуть. Въ области красоты и добра точно такъ же, какъ въ области истины онъ горячо преслѣдуетъ идеалъ, совершенство, обладанія которымъ ему не дано достигнуть; онъ пытается приблизиться къ нему и, чувствуя что въ концѣ концовъ, онъ, все-таки, безсиленъ, видитъ возможность эволюціи, которая все болѣе и болѣе скрадываетъ неизбѣжное разстояніе. У него существуетъ, если не надежда, то, по крайней мѣрѣ, предвидѣніе неопредѣленнаго прогресса. Если бы даже этотъ прогрессъ исчезъ въ туманной дали, если бы его осуществленіе сдѣлалось проблематическимъ, то и тогда человѣкъ чувствуетъ, что существуетъ необходимый типъ, предѣлъ—выражаясь языкомъ математиковъ,—къ которому все случайное и недоконченное должно тяготѣть. Находясь на почвѣ геометріи, онъ и здѣсь вноситъ свое требованіе идеала и совершенства. Онъ ищетъ фигуръ безъ погрѣшностей, линій безъ ширины, поверхностей безъ толщины. Окруженный прерывностью и разнородностью онъ ищетъ непрерывности и однородности. Въ ломанной линіи, состоящей изъ уменьшающихся прямыхъ линій, онъ видитъ кривую, на которой перемѣны направленія сглаживаются. Вмѣсто послѣдовательныхъ измѣченій величинъ, онъ беретъ нечувствительныя измѣненія ихъ оттѣнковъ. Все соединяется, все гармонизируется въ его умѣ больше, чѣмъ въ дѣйствительности. Такимъ образомъ, появляется понятіе о предѣлѣ путемъ идеализированія каждаго предмета мысли, каждаго явленія природы, прежде нежели оно дѣлается несравненнымъ орудіемъ открытій.

ГЛАВА VI.

Способъ безконечно малыхъ.

Перемѣнныя количества, приближающіяся каждое къ своему предѣлу, могутъ вступать между собою въ извѣстныя отношенія. Если эти отношенія сохраняются во все время приближенія къ предѣлу, или для всѣхъ значеній перемѣнныхъ величинъ, то они существуютъ также и между самими предѣлами. Они законнымъ образомъ распространяются на эти послѣдніе, хотя ихъ и нельзя установить между предѣлами непосредственно. Такъ, отношеніе, установленное между

площадью правильнаго многоугольника, его периметромъ и перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ центра на одну изъ сторонъ, или апоѳемой, существуетъ и между площадью круга, описаннаго вокругъ даннаго многоугольника, его окружностью и радіусомъ, которые служатъ соотвѣтствующими предѣлами элементовъ многоугольника, по мѣрѣ увеличенія числа его сторонъ.

Этотъ общій принципъ есть прямое слѣдствіе понятія о предѣлѣ, и его очевидность кажется неоспоримой. Какимъ образомъ, въ самомъ дѣлѣ, отношеніе, существующее между перемѣнными величинами при всѣхъ ихъ значеніяхъ, могло бы оказаться непримѣнимымъ къ предѣламъ? Въ какой моментъ прекратилась бы непрерывность этого отношенія? Какое мѣсто отвести ему въ этомъ неопредѣленно сжатомъ пространствѣ, отдѣляющемъ перемѣнныя отъ ихъ предѣловъ?

Геометры даютъ этому болѣе точное доказательство; несмотря на его сухость, я его приведу вкратцѣ, вслѣдствіе крайней важности принципа.

Если, говорятъ они, существовала бы разность между отношеніемъ перемѣнныхъ величинъ и отношеніемъ соотвѣтствующихъ имъ предѣловъ, то эту разность можно бы было представлять себѣ эквивалентной нѣкоторому количеству, способному быть выраженнымъ цифрами или нѣтъ, но во всякомъ случаѣ конечному. Замѣнимъ же въ отношеніи между перемѣнными каждую изъ нихъ соотвѣтствующимъ ей предѣломъ. Тогда создастся столько же поводовъ къ погрѣшностямъ, сколько существуетъ перемѣнныхъ, и каждый изъ этихъ поводовъ будетъ измѣряться разстояніемъ, существующимъ между настоящимъ значеніемъ перемѣнной и постояннымъ значеніемъ ея предѣла. Эти различные поводы къ погрѣшностямъ будутъ, притомъ, расширены и умножены вслѣдствіе ряда операцій, въ которыхъ участвовали перемѣнныя величины, и въ которыхъ ихъ мѣсто заняли предѣлы. Каковъ бы ни былъ результатъ этого расширенія, окончательная погрѣшность, происшедшая вслѣдствіе введенія предѣла, можетъ быть представлена соотвѣтствующимъ разстояніемъ между настоящимъ значеніемъ перемѣнной и постояннымъ значеніемъ ея предѣла, помноженнымъ на болѣе или менѣе значительное число, соизмѣримое или нѣтъ, но конечное. Короче говоря, погрѣшность, происходящая вслѣдствіе подстановки всѣхъ предѣловъ будетъ выражаться суммой равныхъ членовъ, каждый изъ которыхъ представляетъ собою произведеніе извѣстнаго разстоянія

отъ постояннаго значенія предѣла на конечное количество. Но каждый членъ можетъ быть сдѣланъ какъ угодно малымъ, помощью надлежащаго сближенія между перемѣнной и ея предѣломъ, или при помощи достаточнаго уменьшенія разстоянія между ними. Поэтому, сумма тоже можетъ быть сдѣлана менѣе всякаго даннаго конечнаго количества и, слѣдовательно, менѣе разности предположенной между отношеніемъ, соотвѣтствующимъ перемѣннымъ величинамъ, и отношеніемъ, соотвѣтствующимъ ихъ предѣламъ; такъ что этой разности, собственно, не существуетъ.

Этотъ способъ доказательства, называемый приведеніемъ къ абсурду (я пользуюсь употребляемымъ для этого словомъ), предполагаетъ въ самомъ себѣ, что ни одинъ изъ членовъ, полученныхъ подстановкою предѣловъ, вмѣсто перемѣнныхъ величинъ, не можетъ сдѣлаться безконечнымъ. Это обыкновенный случай. Потому что въ немъ функціи непрерывны какъ и перемѣнныя, отъ которыхъ онѣ зависятъ, и каждое безконечно малое приращеніе перемѣннаго производитъ безконечно малое увеличеніе функціи. Поэтому, когда въ отношеніе ставятъ предѣлъ, вмѣсто соотвѣтствующей ему перемѣнной (что сводится къ безконечно малому измѣненію этой послѣдней), то выраженія, въ которыхъ находятся перемѣнныя, должны измѣниться отъ этого весьма мало и не могутъ принимать безконечныхъ значеній.

При нѣкоторыхъ условіяхъ, однако, дѣло происходитъ иначе. Если рѣчь идетъ, предположимъ, о тригонометрическомъ тангенсѣ угла, и если этотъ уголъ приближается къ девяноста градусамъ, то достаточно будетъ весьма малаго приращенія, чтобы онъ сдѣлался прямымъ, и тангенсъ становится безконечнымъ. Подстановка предѣла, вмѣсто перемѣнной, или прямого угла, вмѣсто сосѣдняго ему остраго, производитъ, такимъ образомъ, безконечный членъ, и разсужденіе утрачиваетъ основу. Но въ этомъ положеніи дѣла слѣдуетъ разобраться.

Геометръ умѣетъ объяснить себѣ появленіе безконечной величины въ уравненіи; для него не составляетъ тайны, что она служитъ указателемъ особаго расположенія частей фигуры, на которое онъ не обратилъ вниманія, приступая къ рѣшенію задачи. Онъ разсуждалъ о наклонныхъ линіяхъ и приходитъ къ параллельнымъ, наблюдалъ эллипсы и наталкивается на параболу. Онъ изслѣдовалъ болѣе или менѣе медленное движеніе и приводится къ покою, т. е., отрицанію всякаго движенія. Нѣтъ ничего удивительнаго, что от-

ношенія, установленныя въ первоначальномъ предположеніи, не соотвѣтствуютъ столь различному отъ нихъ типу. Но самый принципъ отъ этого нисколько не страдаетъ, потому что въ сущности тутъ нѣтъ болѣе предѣла: появленіе на сценѣ безконечнаго уничтожаетъ его. Безконечное, какъ показываетъ его названіе, не можетъ образовать предѣла. Оно, по своей природѣ, туманно, неопредѣленно, между тѣмъ какъ всякій предѣлъ, по самому существу своему, отличается точностью и постоянствомъ, т. е., остается конечнымъ.

Мы иногда впадаемъ въ заблужденіе вслѣдствіе плохо приспособленныхъ оборотовъ рѣчи. Напримѣръ, такъ какъ параллельная линія служитъ предѣломъ наклонныхъ, то мы говоримъ о разстояніи до точки встрѣчи, какъ будто бы предѣломъ его была безконечность. Здѣсь происходитъ ошибка въ словоупотребленіи. Предѣлъ, способный войти въ вычисленія, представляетъ собою не названное разстояніе, а направленіе или уголъ, который образуется наклонною съ нѣкоторымъ основаніемъ и который становится равнымъ углу, составляемому съ этимъ основаніемъ параллельною линіей. Точно такъ же, въ сближеніи параболы съ эллипсомъ предѣломъ служитъ не безконечная длина, отдѣляющая фокусы одинъ отъ другого, а направленіе прямой, соединяющей точку кривой съ другимъ фокусомъ, и параллелизмъ которой съ осью эллипса обнаруживается все болѣе и болѣе. Если слово *предѣлъ* употреблять въ его настоящемъ значеніи, то принципъ всегда возможно будетъ примѣнить.

Легко предвидѣть ту пользу, которую геометры должны были извлечь изъ столь общаго предложенія. Во всѣхъ вопросахъ, гдѣ нельзя непосредственно замѣтить отношеній между дѣйствительными элементами, надо будетъ опредѣлить систему перемѣнныхъ, относительно которыхъ каждый изъ этихъ дѣйствительныхъ элементовъ является предѣломъ. Если возможно будетъ найти отношенія между перемѣнными, то они въ то же время будутъ открыты и между предѣлами. Потому что для этого достаточно будетъ ввести въ уравненіе условіе перехода къ предѣламъ, или выразить, что перемѣнныя величины безконечно мало различаются отъ значенія ихъ предѣловъ.

Такимъ образомъ, измѣреніе круга или отношеніе между его площадью, окружностью и радіусомъ замѣняется измѣреніемъ многоугольника, т. е. отношеніемъ аналогичнымъ,

между поверхностью, периметромъ и апоѳемой, гораздо легче распознаваемымъ. Уголъ наклоненія къ оси, абсциссъ касательной къ кривой замѣняется угломъ наклоненія къ ней сѣкущей, которая будетъ незамѣтно поворачиваться вокругъ точки прикосновенія. Пространства, пройденныя движущимся тѣломъ подъ вліяніемъ непрерывно измѣняющейся силы, замѣняются пространствами, пройденными подъ вліяніемъ силы, измѣняющейся скачками и дѣйствующей непрерывно въ теченіе каждаго изъ этихъ весьма малыхъ промежутковъ времени. Кривизна линіи какой угодно формы замѣняется кривизною круга, проходящаго черезъ три взаимно сближающіяся точки кривой. Если возможно будетъ опредѣлить отношенія между подставленными элементами, то задача будетъ рѣшена.

Вотъ въ чемъ заключается сущность предмета исчисленія безконечно малыхъ. Оно занимается замѣной дѣйствительныхъ элементовъ фиктивными, способными приближаться къ первымъ неопредѣленно, а затѣмъ опредѣленіемъ относительно фиктивныхъ элементовъ тѣхъ самыхъ отношеній, которыхъ, при помощи его, нельзя было установить относительно дѣйствительныхъ. Вслѣдствіе этого указанный нами способъ называется *косвеннымъ*. Въ самомъ дѣлѣ, онъ не ведетъ прямо къ цѣли, подобно обыкновенному алгебраическому методу. Онъ не примѣняется къ даннымъ элементамъ. Онъ дѣлаетъ обходъ; онъ рѣшаетъ задачу постороннюю, составленную искусственно. Но трудно представить себѣ что-нибудь болѣе остроумное и въ то же время болѣе соотвѣтствующее общему стремленію нашего духа, развивающемуся подъ вліяніемъ тѣхъ условій, среди которыхъ мы дѣйствуемъ. Сколько разъ мы видѣли себя безсильными побороть нѣкоторыя препятствія! Тогда опытъ учитъ насъ выбирать болѣе длинный, но зато болѣе достижимый путь. Способъ безконечно малыхъ примѣняется такимъ же образомъ. Этотъ способъ тоже обходитъ трудности и достигаетъ цѣли окольнымъ дѣйствіемъ, которое онъ сумѣлъ урегулировать и систематизировать.

Его примѣненіе не всегда просто. Часто даже оно превосходитъ силы величайшихъ геометровъ. Можетъ оказаться крайне затруднительно въ предѣлахъ ли чистой математики, или же при опредѣленіи законовъ природы: 1) найти надлежащую систему перемѣнныхъ, т. е. имѣющихъ соотвѣтствующими предѣлами данныя количества, 2) открыть отношенія между перемѣнными съ цѣлью распространить ихъ на предѣлы.

Я не буду говорить объ этой второй части указанныхъ условій, относительно которой невозможно дать никакого правила. Все зависитъ, очевидно, отъ проницательности изслѣдователя. Привычка, прозорливость, скажу даже, вдохновеніе руководятъ имъ въ этихъ полныхъ неизвѣстности изслѣдованіяхъ Что же касается первой части, то, наоборотъ, для нея способъ безконечно малыхъ даетъ полезныя указанія.

Прежде всего изслѣдователь знаетъ, что онъ не замкнутъ въ одной только системѣ перемѣнныхъ величинъ. Такъ какъ нѣсколько перемѣнныхъ могутъ имѣть одинъ и тотъ же предѣлъ, то онъ выбираетъ наиболѣе выгодную замѣну дѣйствительныхъ элементовъ фиктивными. Однимъ словомъ, онъ можетъ приступить къ задачѣ съ различныхъ сторонъ. Для избѣжанія ошибки въ первоначальномъ выборѣ, способъ этотъ вводитъ нѣкоторыя ограниченія. А именно—ни одна перемѣнная величина не должна быть принимаема, если она не удовлетворяетъ условію, чтобы разность между нею и предѣломъ могла сдѣлаться безконечно малой. Такъ какъ это условіе должно существовать относительно всѣхъ перемѣнныхъ, стремящихся къ одному и тому же предѣлу, то ихъ взаимныя разности должны становиться менѣе всякой данной величины. Если, слѣдовательно, предѣлы безконечно малы (какъ это встрѣчается съ дугою круга, къ которой стремится уменьшающаяся сторона многоугольника), перемѣнныя, способныя ихъ собою замѣнить, должны быть такъ же безконечно малы и притомъ *того же порядка.* Таково необходимое условіе требуемое отъ каждаго количества, замѣняющаго собою дѣйствительный элементъ задачи: оно должно отличаться отъ послѣдняго лишь на количество безконечно малое по отношенію къ нему.

Геометрамъ приходится такимъ образомъ дѣлать первоначальный выборъ изъ количествъ, которыя, повидимому, годятся для употребленія. Напримѣръ, въ упомянутой уже задачѣ о касательной къ кривой, приращеніе абсциссы, а также ординаты, дуга кривой, соотвѣтствующая этому приращенію, хорда, часть касательной, заключающаяся между двумя ординатами, суть безконечно малыя перваго порядка; напротивъ, часть ординаты, заключающаяся между касательной и кривой, представляетъ собою безконечно малое второго порядка. Эту послѣднюю, стало быть, нельзя употребить вмѣсто первыхъ. Движеніе матеріальной точки по кривой подъ вліяніемъ непрерывно дѣйствующей силы часто разлагается на два: одно, происходящее вдоль касательной,

вслѣдствіе пріобрѣтенной скорости и производимое одной лишь тангенціальной составляющей данной силы, другое, направленное къ центру кривизны, подъ вліяніемъ одной лишь нормальной составляющей данной силы. Пространство, пройденное при движеніи по касательной, есть безконечно малое перваго порядка, между тѣмъ какъ пространство, пройденное по нормали, представляетъ собою безконечно малое второго порядка. Если поэтому эти пространства входятъ въ комбинацію, какъ предѣлы, то соотвѣтствующія имъ перемѣнныя будутъ также различныхъ порядковъ.

Второе правило, слѣдствіе предыдущаго, заслуживаетъ спеціальнаго разсмотрѣнія, потому что оно не только оказываетъ очень большія услуги при вычисленіи, но и проливаетъ яркій свѣтъ на строгость способовъ анализа безконечно малыхъ. Оно имѣетъ въ одно и то же время и математическую, и философскую важность.

Это правило формулируется такъ: „два конечныхъ перемѣнныхъ количества, которыхъ разность можетъ сдѣлаться безконечно малой, могутъ быть всегда замѣнены одно другимъ въ вычисленіи“.

Оба эти перемѣнныя должны непремѣнно имѣть одинъ и тотъ же предѣлъ, потому что если бы у нихъ были различные предѣлы, то эти послѣдніе различались бы между собою количествомъ конечнымъ и, слѣдовательно, большимъ, чѣмъ разность между данными величинами, которая способна сдѣлаться безконечно малою. Обладая однимъ и тѣмъ же предѣломъ, эти перемѣнныя могутъ замѣнять одна другую, при чемъ, окончательный результатъ совершенно не можетъ отъ этого измѣниться. Съ какою бы изъ двухъ перемѣнныхъ мы ни имѣли дѣло, мы, все-таки, неизбѣжно должны прійти къ той же величинѣ, когда будемъ переходить къ предѣлу. Такимъ образомъ, кажущаяся причина ошибки, внесенная въ вычисленіе при помощи подстановки одного количества, вмѣсто другого, способнаго безконечно мало отличаться отъ перваго, не можетъ отражаться на опредѣленіи предѣла. Эта причина ошибки должна непремѣнно уничтожиться и она уничтожается въ самомъ дѣлѣ, когда мы оставили перемѣнныя въ сторонѣ и имѣемъ дѣло съ одними лишь предѣлами.

Уравненія между перемѣнными можно назвать предварительными или *переходными*. Они выведены только на время и служатъ къ тому, чтобы привести геометра къ уравненію между предѣлами. Если я пишу, что „площадь пра-

вильнаго многоугольника, вписаннаго въ кругѣ, равняется периметру его, помноженному на половину апоѳемы", то я создаю такимъ образомъ переходное уравненіе. Намѣреніе мое не заключалось въ томъ, чтобы на этомъ и остановиться; я задался цѣлью достигнуть окончательнаго отношенія, гдѣ площадь многоугольника, периметръ и апоѳема были бы соотвѣтственно замѣнены площадью, окружностью и радіусомъ круга. Въ этомъ предварительномъ уравненіи я могу, не рискуя вѣрностью результата, который я преслѣдую, замѣнить употребленныя мною количества другими, разности которыхъ съ первыми могутъ сдѣлаться безконечно малыми. Я могу ихъ замѣнить, именно, площадью, периметромъ и апоѳемой многоугольника описаннаго или тѣми же элементами какого нибудь другого правильнаго многоугольника, опирающагося концами своихъ сторонъ на окружность. Всѣ эти подстановки, внося съ собою разности, находящіяся на пути къ уничтоженію, не будутъ имѣть никакого вліянія на рѣшеніе. Онѣ не помѣшаютъ отыскать тѣ же предѣлы, потому что подстановки, сдѣланныя при такихъ условіяхъ, не могутъ никогда измѣнить предѣловъ.

Что справедливо относительно двухъ конечныхъ величинъ, то же одинаково справедливо и относительно двухъ безконечно малыхъ одного и того же порядка, разность между которыми стремится къ высшему порядку. Оба эти безконечно малыя количества обладаютъ однимъ и тѣмъ же предѣломъ, и замѣна ихъ одного другимъ, во всякій данный моментъ, не можетъ измѣнить окончательнаго результата.

Такимъ образомъ, изслѣдователь имѣетъ предъ собой могущественное средство упрощать и ускорять вычисленія. Онъ можетъ не только въ началѣ, но и въ теченіе вычисленія замѣнять выбранныя сначала перемѣнныя количества другими, отличающимися отъ нихъ безконечно мало по отношенію къ тѣмъ и другимъ. Точно такъ же онъ можетъ просто-таки исключить изъ уравненія всѣ безконечно малыя порядковъ высшихъ сравнительно съ тѣми, которыя употребляются для опредѣленія предѣловъ. При этомъ ему нѣтъ никакой необходимости оправдывать такое исключеніе тѣмъ, что онъ пренебрегаетъ этими величинами, „какъ песчинками сравнительно съ необъятнымъ моремъ" *). Мы пренe-

*) Извѣстныя слова, приписываемыя Лейбницу. Случается не въ первый разъ — да и не въ послѣдній, что тотъ или другой геніальный изобрѣтатель не замѣчаетъ сразу же философскаго основанія своего открытія.

брегаемъ ими потому, что они не оказываютъ ни малѣйшаго вліянія на предѣлы. Въ этомъ случаѣ мы не можемъ сказать, что довели приближеніе до крайней степени, но что мы употребили точный и абсолютно строгій способъ, результаты котораго такъ же вѣрны, какъ теоремы Эвклида.

Таковъ великій принципъ упрощенія уравненія съ безконечно малыми: принципъ, о которомъ было столько споровъ, и который не всегда бывалъ представляемъ достаточно ясно *). Хорошенько проникая въ его духъ, мы въ немъ черпаемъ увѣренность не только въ полной точности аналитическихъ пріемовъ, но также и въ ихъ совершенномъ подобіи съ пріемами обыкновенной алгебры. Разъ составленіе уравненія удалось, мы пускаемъ въ дѣло не менѣе надеж-

---

*) Знаменитый Лазарь Карно, съ цѣлью доказать строгость вычисленія безконечно малыхъ, недостаточно еще установленную въ его время, изобрѣлъ очень остроумное, и, по моему мнѣнію, довольно-таки не философское объясненіе: „пренебрегая, говоритъ онъ, какъ абсолютными нулями, количествами, которыя могутъ предполагаться какъ угодно малыми, когда они прилагаются къ другимъ, относительно которыхъ нельзя предположить, чтобы они тоже являлись безконечно малыми или же когда мы отнимаемъ первыя отъ послѣднихъ, мы предполагаемъ, очевидно, что ошибки могущія произойти во время вычисленія или оказать вліяніе на результатъ, могутъ подобнымъ же образомъ предполагаться какъ угодно малыми, слѣдовательно, въ этомъ результатѣ останется нѣчто произвольное, что противорѣчитъ предположенію. потому что всѣ произвольныя количества предполагаются совершенно исключенными“. (Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal, 4-e édition, page 24).

Разсужденіе Карно основывается на томъ фактѣ, что дѣйствія вычисленія безконечно малыхъ, приводящія всегда къ отношеніямъ между конечными величинами, исключаютъ, слѣдовательно, безконечно малыя количества, которыя имѣли въ нихъ чисто фиктивное значеніе, и потому возстановляютъ или компенсируютъ ошибки, вкравшіяся, можетъ быть, въ начальныя уравненія; онъ называлъ ихъ поэтому *несовершенными* „Я называю, говоритъ онъ, *несовершеннымъ* всякое уравненіе, строгая точность котораго не доказана, но относительно котораго извѣстно, однако, что ошибку, если, только она существуетъ, можно предположить какъ угодно малой, т. е. такой, что для приданія совершенной точности уравненію, достаточно, вмѣсто входящихъ въ него количествъ, или вмѣсто нѣкоторыхъ изъ нихъ, поставить другія количества, отличающіяся отъ нихъ безконечно мало“. (Тамъ же, стр. 30). Несовершенныя уравненія Карно суть уравненія переходныя, какъ мы ихъ называли и совершенно точныя въ томъ смыслѣ, что они предшествуютъ переходу къ предѣламъ, гдѣ безконечно малыя высшаго порядка не играютъ никакой роли.

ный механизмъ; мы отыскиваемъ количества не въ меньшей мѣрѣ точныя и опредѣленныя, а именно предѣлы, и при этомъ достигаемъ результатовъ, столь же свободныхъ даже отъ минимальныхъ ошибокъ

Способъ безконечно малыхъ сводится, слѣдовательно, къ слѣдующимъ двумъ операціямъ:

1) къ замѣнѣ дѣйствительныхъ элементовъ вопроса элементами вспомогательными, способными неопредѣленно приближаться къ первымъ;

2) къ простому исключенію въ продолженіе вычисленія количествъ, способныхъ сдѣлаться безконечно малыми по отношенію къ тѣмъ, предѣлы которыхъ имѣютъ въ виду опредѣлить.

Теоретическая простота метода не оставляетъ желать ничего большаго. Но на практикѣ методъ, представленный въ такомъ видѣ, влечетъ за собой серьезныя неудобства. Принимаемое нами на себя обязательство по отношенію ко всякому вопросу—начинать съ окольнаго пути, имѣя въ виду найти перемѣнныя, способныя имѣть предѣлами данные элементы, приводитъ насъ къ цѣлому ряду соображеній, свойственныхъ этого рода изслѣдованіямъ. Кажется, однако ,что все это слѣдовало бы принять къ свѣдѣнію разъ навсегда. Къ чему, напримѣръ, было бы напоминать каждый разъ, что кривыя представляютъ собою предѣлъ многоугольниковъ, число сторонъ которыхъ увеличивается непрерывно; или что перемѣнное движеніе есть предѣлъ ряда движеній равномѣрныхъ, которыхъ продолжительность уменьшается неопредѣленно?

Выражаться такъ, значитъ говорить, что малыя дуги кривыхъ различаются отъ ихъ хордъ и малыя перемѣнныя движенія отличаются отъ движеній равномѣрныхъ количествами безконечно малыми по отношенію къ нимъ самимъ. Но двѣ перемѣнныя величины, разность которыхъ дѣлается безконечно малой по отношенію къ нимъ самимъ, могутъ быть замѣнены одна другой, безъ риска ошибиться въ окончательномъ результатѣ. Отсюда остается, очевидно, одинъ только шагъ до утвержденія, что малыя дуги кривыхъ могутъ быть уподоблены прямымъ линіямъ, а малыя перемѣнныя движенія—движеніямъ равномѣрнымъ; или еще лучше—до утвержденія, что малыя дуги кривыхъ просто таки прямолинейны, а малыя перемѣнныя движенія—равномѣрны. Этотъ шагъ былъ сдѣланъ Лейбницемъ и его учениками.

Слѣдуетъ съ нимъ себя поздравить, потому что онъ послужилъ началомъ широкаго полета, сдѣланнаго анализомъ

безконечно малыхъ. Эта наука пріобрѣла настоящее общественное значеніе именно въ тотъ день, когда было принято, что кривыя образуются изъ безчисленнаго множества безконечно малыхъ прямыхъ линій или прямолинейныхъ *элементовъ;* что перемѣнное движеніе состоитъ изъ безконечнаго числа равномѣрныхъ безконечно краткихъ движеній или равномѣрныхъ *элементовъ:* что кривая поверхность образуется изъ безчисленнаго множества безконечно малыхъ плоскостей или плоскихъ *элементовъ*, что охлажденіе тѣла происходитъ помощью послѣдовательнаго ряда *элементарныхъ* охлажденій, въ продолженіе каждаго изъ которыхъ скорость остается постоянной и т. д. Однимъ словомъ, всякаго рода величины были мысленно разложены на простѣйшіе элементы, между которыми становится возможнымъ, вслѣдствіе этой самой простоты, установить отношенія, скрывающіяся отъ насъ въ томъ случаѣ, когда мы ихъ пытаемся вывести непосредственно между дѣйствительными элементами.

Этотъ способъ разложенія или, выражаясь болѣе правильно, *уподобленія* реальныхъ элементовъ фиктивнымъ, явно законенъ. Въ сущности, онъ представляетъ собою заимствованный и быстрый путь примѣненія метода предѣловъ. Весь входящій въ него предварительный рядъ изслѣдованій и разсужденій молча предполагается уже сдѣланнымъ. Имъ пользуются, не спрашивая себя почему, а прямо. Ему обязаны, слѣдовательно, той строгостью, которая требуется быстротою дѣйствія.

Связь между элементами перемѣнными и ихъ предѣлами была понята не сразу. Лейбницъ подошелъ прямо къ истинѣ, не прибѣгая къ переходнымъ ступенямъ, какъ это дѣлается обыкновенными людьми, но не объяснилъ основанія своего открытія. Онъ ограничился оправданіемъ его на блестящихъ приложеніяхъ и далъ, какъ будто шутя, рѣшеніе задачъ, считавшихся до того времени неприступными. Въ настоящее же время нельзя удовлетвориться доказательствомъ до нѣкоторой степени опытнымъ, точно такъ же, какъ невозможно основать свои знанія на вѣрѣ въ авторитетъ генія. Необходимо возвести зданіе на неоспоримыхъ доказательствахъ. Теорія предѣловъ одна только могла ихъ доставить.

Методъ уподобленія или методъ Лейбница, именно вслѣдствіе представляемой имъ легкости, вслѣдствіе быстроты дѣйствія, которую онъ вызываетъ, не лишенъ, однако, нѣ-

которыхъ опасностей. При недостаткѣ надлежащаго вниманія является склонность уподоблять другъ другу элементы, въ сущности, весьма различные между собою, потому что они могутъ быть безконечно малыми различныхъ порядковъ. Напримѣръ, перемѣнное движеніе представляетъ случай весьма различныхъ уподобленій, въ которыхъ слѣдуетъ разобраться. Если хотятъ опредѣлить скорость въ нѣкоторый моментъ, то движеніе разсматривается, начиная съ этого момента, какъ постоянное въ продолженіе безконечно малаго промежутка времени, а сила въ продолженіе этого промежутка времени считается равною нулю. Если же желаютъ измѣрить стремленіе движущагося тѣла сойти съ криволинейнаго пути или, согласно принятому выраженію, вычислить центробѣжную силу, то въ этомъ случаѣ тотчасъ же измѣняется точка зрѣнія. Движущая сила, только что передъ тѣмъ гипотетически равная нулю, въ данномъ случаѣ будетъ разсматриваться, какъ постоянная; она разлагается на составляющія, касательную и нормальную, при чемъ опредѣляется пространство, которое пробѣгаетъ тѣло подъ вліяніемъ этой послѣдней къ центру кривой. Такимъ образомъ, нормальная составляющая и соотвѣтствующій ей путь, пройденный тѣломъ, удерживаются или на нихъ не обращается вниманія, смотря по природѣ предлагаемаго вопроса. Главная забота, слѣдовательно, должна состоять въ томъ, чтобы строго опредѣлить порядокъ данныхъ безконечно малыхъ величинъ, потому что нѣкоторыя изъ нихъ могутъ быть ничтожны сравнительно съ однѣми и не быть таковыми по отношенію къ другимъ безконечно малымъ величинамъ. Прежде всего необходимо, какъ мы сказали, вводить въ вычисленіе лишь количества одного и того же порядка и замѣнять одинъ элементъ другимъ только въ томъ случаѣ, когда разность между ними безконечно мала по отношенію къ нимъ самимъ. Въ случаѣ перемѣннаго движенія, пространство пройденное по кривой или по касательной представляетъ безконечно малое перваго порядка; а пространство пройденное по нормали—безконечно малое второго порядка. Длина описанная вслѣдствіе одной лишь пріобрѣтенной скорости есть безконечно малое перваго порядка; приращеніе же длины, происходящее вслѣдствіе дѣйствія составляющей, направленной вдоль касательной (тангенціальной), будетъ безконечно малымъ второго порядка. Слѣдовательно, всѣ эти разнообразныя величины нельзя замѣнять однѣ другими безразлично.

Вотъ въ чемъ состоитъ сущность извѣстнаго метода нѣмецкаго философа. Нельзя отнять у него, между другими преимуществами, одного чрезвычайно высокаго достоинства: онъ удивительно приспособленъ къ организаціи нашего ума— скажемъ даже, къ пріемамъ дѣятельности самой природы, или, по крайней мѣрѣ, нашей манерѣ представлять ихъ себѣ. Разложеніе непрерывной величины на множество мелкихъ частей, вродѣ лѣстницы, ступеньки которой дѣлаются все чаще и чаще, служитъ, въ нашихъ глазахъ, самымъ лучшимъ способомъ представленія явленія роста или уменьшенія. Безъ сомнѣнія, у насъ есть идея непрерывнаго измѣненія, но нѣтъ образа его; поэтому мы всегда и бываемъ вынуждены прибѣгать къ представленію себѣ весьма малыхъ послѣдовательныхъ скачковъ. Мы не воображаемъ иначе движеніе тѣла, описывающаго кривую въ пространствѣ.

Концепція Лейбница представляетъ собою обобщеніе этой точки зрѣнія. Она разлагаеть непрерывную величину на ея безконечно малые элементы подобно тому, какъ поступилъ бы химикъ, разлагая тѣло на частицы его крайняго дѣленія. Величайшая заслуга этого великаго человѣка заключается именно въ доказательствѣ, что введеніе подобной гипотезы не нарушаетъ нисколько точности вычисленія. При условіи разсматривать элементы, какъ дѣйствительно безконечно малые или какъ способные сдѣлаться менѣе всякой данной величины, точность его способа не сокрушима. Ему оставалось лишь указать *причину* этой точности, т. е. показать, что переходъ болѣе или менѣе явный къ предѣламъ, заставляетъ оставлять безъ вниманія разности, могущія произойти вслѣдствіе введенія фиктивныхъ элементовъ, вмѣсто дѣйствительныхъ. Заботу объ этомъ онъ оставилъ на долю своихъ послѣдователей.

Греческіе геометры отчасти усматривали эти истины. Измѣреніе круга и трехъ круглыхъ тѣлъ въ геометріи Эвклида, открытія Архимеда, касающіяся болѣе сложныхъ фигуръ, заключаютъ въ себѣ зародышъ анализа безконечно малыхъ. Но лишенные пособія алгебры, не имѣя подобно Лейбницу и Ньютону, въ своемъ распоряженіи удивительныхъ работъ Вьета и особенно Декарта, они не могли подняться на высоту общаго метода и еще менѣе создать правильный способъ, который походилъ бы по своей точности на дифференціальное или интегральное вычисленіе. Тѣмъ не менѣе, ихъ изслѣдованія, даже неполныя, позволяютъ соединить звенья цѣпи, представляемой наукой прошедшаго.

Продолжительныя усилія, которыя, въ теченіе двухъ тысячъ лѣтъ должны были привести къ современному анализу, показываютъ, что человѣческій разумъ остается постоянно вѣренъ самому себѣ шествуя неуклонно впередъ, расширяя и обобщая свои методы, но не теряя никогда изъ вида первоначальной идеи, породившей въ немъ эти методы.

ГЛАВА VII.

Вычисленіе безконечно малыхъ.

Вычисленіе безконечно малыхъ имѣетъ цѣлью рѣшеніе уравненій, выведенныхъ при помощи указаннаго выше метода, или же опредѣлить значеніе предѣловъ, выраженія которыхъ входятъ въ уравненія

При первомъ взглядѣ можно бы было думать, что эти выраженія облекаются въ самыя разнообразныя формы. Но ничего подобнаго нѣтъ. Несмотря на громадное число вопросовъ, рѣшеніемъ которыхъ мы занимаемся, типы предѣловъ, которыми мы пользуемся въ данномъ случаѣ сводятся только къ двумъ. Недостаточность этого была бы очевидна если бы мы не помнили, какъ мало существенныхъ понятій находится въ обладаніи человѣческаго ума, и какъ разнообразно, повидимому, употребленіе каждаго изъ нихъ. Кажется, что можетъ быть обширнѣе идеи *отношеній*, которая приводитъ, въ концѣ концовъ, подъ страхомъ утратить всякую точность къ равенству или къ уравненію между данными? Тщетно мы искали бы возможности получить яснѣе понятіе объ отношеніи, помимо этого единственнаго представленія о равенствѣ. Откуда бы мы ни исходили, мы неизбѣжно приводимся къ уравненію между различными комбинаціями, осуществленными при помощи обыкновенныхъ математическихъ дѣйствій. Наконецъ обыденная рѣчь носитъ отпечатокъ нашей склонности распредѣлять знанія въ немногочисленныя категоріи, обыкновенно соединенныя одна съ другой попарно. *Отрицаніе* и *утвержденіе*, *за* и *противъ*, *цѣлое* и *часть*, *конечное* и *безконечное* представляютъ собою выраженія этой формы мышленія. Поэтому не слѣдуетъ удивляться, что извѣстно такъ мало типовъ для выраженія предѣловъ.

Еще менѣе приходится удивляться, перебирая въ памяти математическія дѣйствія, къ которымъ должно быть примѣнено понятіе о предѣлахъ. Рядомъ послѣдовательныхъ разложеній всегда приходятъ къ элементарнымъ дѣйствіямъ, къ функціямъ не сводимымъ на другія и обозначаемымъ подъ именемъ *алгориѳмовъ*. Возвращаясь къ перечисленію ихъ въ главѣ III, мы найдемъ, что четыре существенныя функціи, на которыя понятіе о предѣлахъ можетъ съ пользою распространяться суть: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. Но какое значеніе могъ бы имѣть предѣлъ вычитанія, оба члена котораго были бы безконечно малыя одного и того же порядка, какъ напримѣръ, хорда и стягиваемая ею дуга. Очевидно—эта разность стремилась бы къ нулю и не представляла бы собою никакого интереса. То же самое произошло бы и съ предѣломъ умноженія, оба множителя котораго обладали бы безконечно малымъ значеніемъ. Произведеніе представлялось бы безконечно малымъ высшаго порядка, заниматься которымъ было бы безполезно. Напротивъ, предѣлъ дѣленія можетъ быть въ высшей степени интересенъ. Въ то время какъ дѣлимое и дѣлитель уменьшаются, частное постоянно обладаетъ конечнымъ значеніемъ, и это значеніе стремится къ нѣкоторому опредѣлимому предѣлу, по мѣрѣ того какъ дѣлимое и дѣлитель приближаются къ нулю. Подобнымъ же образомъ сумма безконечно малыхъ величинъ можетъ имѣть и обыкновенно имѣетъ конечный предѣлъ, когда число членовъ ея увеличивается въ пропорціи ихъ уменьшенія. Вычисленіе безконечно малыхъ занимается, слѣдовательно, предѣлами отношеній и предѣлами суммъ. Оно задается цѣлью установить методическіе способы, съ помощью которыхъ эти предѣлы могутъ быть опредѣлены на самомъ дѣлѣ въ каждомъ частномъ случаѣ.

Безъ сомнѣнія, всѣ предметы природы и тѣ, которые порождаетъ геній геометровъ, не подходятъ подъ эти два понятія. Можно вообразить себѣ безчисленное множество такихъ предметовъ, выраженіе которыхъ требовало бы другого рода предѣловъ. Тѣмъ не менѣе, хотя поле дѣятельности остается теоретически открыто, въ дѣйствительности, въ теченіе трехъ столѣтій не было создано еще ни одного новаго рода предѣла. Знаменитый опытъ Лагранжа, увѣнчавшійся открытіемъ *варіаціоннаго вычисленія*, не заключаетъ въ себѣ идеи новой по сравненію съ идеями Ньютона и Лейбница. Въ философскомъ отношеніи мы остано-

вились на двухъ единственныхъ типахъ, данныхъ первыми изобрѣтателями.

Столь ограниченная теорія предѣловъ, тѣмъ не менѣе, чрезвычайно полезна, потому что примѣняется къ совершенно изумительному числу предметовъ. Она соотвѣтствуетъ предметамъ въ высшей степени достойнымъ нашего вниманія, и если бы могла быть примѣнена всецѣло, то оставила бы весьма немного важныхъ вопросовъ. Ея несовершенство происходитъ гораздо менѣе отъ недостатка широты понятія предѣловъ, чѣмъ отъ нашего безсилія найти практически значенія послѣднихъ. Мы встрѣчаемъ предѣлы вычисленія раньше предѣловъ метафизической концепціи.

Предѣлы отношеній являются, именно, въ двухъ рядахъ вопросовъ очень обширнаго порядка и, въ сущности, принадлежащихъ одной и той же идеѣ. Это—вопросы о проведеніи касательной въ геометріи и вопросы о скорости въ механикѣ.

Идея скорости, какъ мы уже замѣтили, выходитъ за предѣлы механики. Она распространяется на всѣ явленія, гдѣ исчисляется законъ измѣненія элемента по отношенію ко времени. Я привелъ факты изъ области физики, химіи и даже соціологіи, въ которыхъ понятіе о скорости является совершенно естественнымъ образомъ. Можно бы еще болѣе обобщить это понятіе и понимать скорость, какъ отношеніе между измѣненіями двухъ какихъ нибудь количествъ, изъ которыхъ одно, принятое за терминъ сравненія, предполагается равномѣрно увеличивающимся; такимъ образомъ создается нѣчто въ родѣ метафорической скорости. Можно вычислить, напримѣръ, законъ увеличенія глубины моря по разстоянію отъ берега, или законъ распредѣленія температуръ въ однородномъ тѣлѣ, соотвѣтственно разстоянію его отъ источника теплоты. Эти отношенія, имѣющія, надо сознаться, со скоростью лишь отдаленную аналогію, получили различныя названія, смотря по природѣ явленій. Наиболѣе употребительнымъ изъ нихъ считается *покатость* или *наклонъ*. Вычисленіе предѣловъ происходитъ при этомъ обыкновеннымъ способомъ.

Вопросы о проведеніи касательной, которыми геометры занимались съ такимъ рвеніемъ до открытія вычисленія безконечно малыхъ относятся къ идеѣ наклоненія, а слѣдовательно, къ идеѣ обобщенной скорости.

Кромѣ того, въ задачѣ механики касаніе не отличается отъ скорости. Въ самомъ дѣлѣ, въ криволинейномъ движеніи

тѣла скорость въ каждое мгновеніе направлена по касательной къ траекторіи, и ея величина измѣряется отношеніемъ элемента, пройденнаго по касательной къ элементу времени. Наклоненіе касательной отмѣчаетъ поэтому въ каждое мгновеніе направленіе движенія. Характеръ измѣненія этого наклоненія отъ одной точки траекторіи до другой указываетъ напряженіе нормальной составляющей, стремящейся отбросить движущееся тѣло къ центру кривой. Вопросы о проведеніи касательной, изучаемые независимо отъ вопросовъ движенія, составляютъ важную часть геометріи.

Предѣлы суммы играютъ не меньшую роль. Они служатъ въ частности для опредѣленія количествъ, такъ сказать, обратныхъ касанію и скорости, я говорю о пройденномъ пространствѣ и о длинѣ кривыхъ. Путь, пройденный движущимся тѣломъ, можно считать предметомъ задачи, обратной задачѣ о скорости. Если бы была извѣстна скорость соотвѣтствующая каждому мгновенію, то изъ нея опредѣлилось бы и пройденное пространство; оно представлялось бы суммой произведеній, получаемыхъ въ каждый моментъ, посредствомъ умноженія скорости на безконечно малый промежутокъ времени. Все сводится, слѣдовательно, къ вычисленію на самомъ дѣлѣ этой суммы, т. е., къ опредѣленію предѣла, къ которому стремится совокупность безконечно малыхъ членовъ, соотвѣтствующихъ послѣдовательнымъ скоростямъ.

Въ этомъ вопросѣ, какъ и во множествѣ другихъ, предѣлъ суммы вызываетъ идею о произведеніи или причинѣ. Пройденное пространство дѣйствительно порождается скоростью. Скорость же, въ свою очередь, производится движущей силой и выражается суммой произведеній, полученныхъ отъ умноженія, въ каждое мгновеніе, напряженія силы на безконечно малый промежутокъ времени ея дѣйствія. То же замѣчаніе распространяется и на всѣ естественно-научныя задачи, въ которыхъ приходится разсматривать нѣкоторый видъ скорости, аналогичный скорости механической, и нѣкоторое опредѣляющее дѣйствіе, аналогичное движущей силѣ.

Въ геометріи къ идеѣ причинности нельзя обращаться непосредственно. Она, тѣмъ не менѣе, является всякій разъ, когда желаютъ разсматривать происхожденіе линій изъ движенія матеріальной точки. Длина дуги кривой представляетъ тогда большую аналогію съ частью траекторіи. Ея длина выражается суммой произведеній, полученныхъ отъ умноже-

нія наклоненія касательной въ каждой точкѣ на безконечно малое приращеніе координаты кривой. То же самое относится и къ поверхности заключенной внутри кривой. Ее можно разсматривать какъ происходящую отъ движенія прямой, перемѣщающейся параллельно самой себѣ и опирающейся на кривую. Эта поверхность выражается, слѣдовательно, суммой безконечнаго числа членовъ, каждый изъ которыхъ равенъ произведенію прямой на ея безконечно малое перемѣщеніе.

Предѣлъ отношенія вызываетъ скорѣе идею совмѣстнаго движенія или отношенія по положенію. Направленіе касательной находится въ отношеніи положенія съ координатами кривой. Скорость движущагося тѣла, выведенная изъ пройденнаго пространства, представляетъ собою фактъ развивающійся совмѣстно съ пространствомъ, пройденнымъ тѣломъ въ безконечно малый промежутокъ времени. Ускореніе или увеличеніе скорости также представляетъ собою фактъ развивающейся совмѣстно съ приращеніемъ пройденнаго пространства во время двухъ, слѣдующихъ одно за другимъ мгновеній. Въ подобномъ случаѣ идея происхожденія не представляется уму. Мы замѣтили однако, что скорость вмѣсто того, чтобы быть выведенной изъ отношенія пройденнаго пространства къ употребленному на это времени, можетъ разсматриваться, какъ предѣлъ суммы членовъ, полученныхъ умноженіемъ силы на элементарные промежутки времени. Этотъ примѣръ предмета, разсматриваемаго поочередно, смотря по взгляду, которому отдаютъ предпочтеніе, какъ предѣлъ суммы или какъ предѣлъ отношенія, какъ слѣдствіе или какъ причина (слѣдствіе по отношенію къ силѣ и причина по отношенію къ пройденному пространству), не заключаетъ въ себѣ ничего удивительнаго, такъ какъ намъ извѣстно, что въ связи явленій каждое изъ нихъ представляетъ собою поперемѣнно то слѣдствіе, то причину: слѣдствіе по отношенію къ предшествующему явленію, а причину по отношенію къ послѣдующему По, этому не удивительно, что въ механикѣ, которая является первой изъ физическихъ наукъ, наши представленія испытываютъ на себѣ вліяніе этого общаго взгляда на координацію фактовъ во времени.

Та вѣтвь алгебры, которая имѣетъ цѣлью вычисленіе предѣловъ отношеній, получила названіе *дифференціальнаго вычисленія*, а та, которая занимается вычисленіемъ предѣловъ суммы, называется *интегральнымъ вычисленіемъ*. Послѣд-

нее названіе понятно само собой. Оно выражаетъ способъ вычисленія *интеграла* или цѣлаго, каждая изъ частей котораго представляется весьма малымъ членомъ.

Предѣлъ отношенія получается помощью всегда безошибочнаго пріема. Принципъ, на которомъ онъ основанъ извѣстенъ. Независимое перемѣнное получаетъ опредѣленное приращеніе, и функція разлагается въ строку, расположенную по восходящимъ степенямъ этого приращенія. Отношеніе приращенія функціи къ приращенію перемѣнной получаетъ форму многочлена, первый членъ котораго представляетъ собою нѣкоторую алгебраическую функцію, называемую *первой производной* (потому что она выводится изъ данной функціи согласно постояннымъ законамъ), а всѣ остальные члены содержатъ въ себѣ восходящія степени приращенія независимой перемѣнной. Когда переходятъ къ предѣлу, т. е., когда предполагаютъ приращеніе независимаго, перемѣннаго безконечно малымъ, всѣ члены, кромѣ перваго, не заключающаго въ себѣ этого приращенія стремятся къ нулю, и исчезаютъ передъ первымъ, вслѣдствіе правила, позволяющаго исключить безконечно малыя величины и оставить только величины конечныя. Искомый предѣлъ, слѣдовательно равняется значенію перваго члена многочлена, или первой производной функціи.

Эту производную всегда можно вычислить. Въ самомъ дѣлѣ: производная самой сложной функціи сводится къ производнымъ функцій простыхъ. Послѣднія же опредѣлены разъ на всегда и представляютъ нѣчто въ родѣ пиѳагоровой таблицы. Математикъ ограничивается тѣмъ, что справляется съ этой таблицей, сведя первоначально сложную функцію къ функціямъ простымъ; подобно тому какъ онъ сводитъ умноженіе самыхъ большихъ чиселъ къ умноженію девяти первыхъ цыфръ.

Первая производная, предѣлъ отношенія приращенія функціи къ приращенію независимой перемѣнной обладаетъ конечнымъ значеніемъ у всѣхъ непрерывныхъ функцій. Впрочемъ, указываютъ на нѣсколько функцій, искусственно построенныхъ геометрами, которыя будучи непрерывными, могутъ не имѣть конечной производной. Я не буду останавливаться на этихъ исключеніяхъ, не имѣющихъ никакого отношенія къ реальнымъ явленіямъ и, по моему мнѣнію, не представляющимъ внѣ чисто математическаго интереса большой пользы.

Согласно обозначенію и выраженію, введеннымъ Лейб-

ницемъ, отношеніе предѣла есть „отношеніе безконечно малаго приращеніи функціи къ безконечно малому приращенію независимой перемѣнной“, въ предположеніи, разумѣется, перехода впослѣдствіи къ предѣламъ. Согласно этому опредѣленію и все въ томъ же предположеніи безконечно малое приращеніе функціи равно произведенію производной на безконечно малое приращеніе независимой перемѣнной. До тѣхъ поръ пока указанный переходъ къ предѣламъ не осуществился, это равенство остается неточнымъ. Произведеніе представляетъ только часть приращенія функціи, иначе говоря, частичную разность между двумя значеніями функціи, соотвѣтствующую двумъ различнымъ значеніямъ независимой перемѣнной. Сокращеніе двухъ словъ différence—разность и partielle, частичная дало начало слову *дифференціалъ* differentzialle, которымъ это произведеніе окончательно и названо. Дифференціальнымъ вычисленіемъ, слѣдовательно, называется вычисленіе дифференціаловъ или производныхъ.

Предѣлы суммы, точно такъ же, какъ и предѣлы отношенія и съ тѣми же исключеніями, обладаютъ конечными значеніями, въ томъ случаѣ, когда функціи непрерывны. Но интегральное вычисленіе лишено правильнаго и вѣрнаго способа ихъ опредѣленія. „Съ этими двумя частями анализа функцій (дифференціальнымъ и интегральнымъ вычисленіями), говоритъ Лагранжъ, дѣло обстоитъ точно такъ же, какъ съ ариѳметикой и алгеброй, которыя имѣютъ предметомъ прямыя дѣйствія—умноженіе и возвышеніе въ степень; и дѣйствія обратныя—дѣленіе и извлеченіе корней. Перваго рода дѣйствія всегда возможны при помощи извѣстныхъ правилъ и даютъ точные результаты; дѣйствія же второго рода напротивъ, возможны, по крайней мѣрѣ, точнымъ образомъ, только въ нѣкоторыхъ случаяхъ, а во всѣхъ другихъ могутъ давать лишь приближенные разультаты [1]), Всякому извѣстно, что если легко умножать число само на себя или образовать его квадратъ, то, вообще говоря, невозможно найти число, которое, будучи помножено само на себя, воспроизводило бы данное, или было бы его квадратнымъ корнемъ. А между тѣмъ этотъ корень неявно существуетъ; въ нѣкоторыхъ случаяхъ даже мы можемъ его представить себѣ очень ясно. Если сторона геометрическаго квадрата, напримѣръ, равна единицѣ, то его діоганаль представляетъ собою корень квадратный изъ двухъ, ариѳмети-

[1]) Théorie des fonctions analytiques p. 124.

ческое выраженіе котораго находится внѣ нашихъ средствъ. Точно также существуютъ въ неявномъ видѣ интегралы, только мы не въ состояніи отыскать ихъ, т. е., выразить явно ихъ значенія. Чаще всего мы принуждены въ этомъ случаѣ идти ощупью.

Достойно удивленія, что, обладая столь несовершеннымъ инструментомъ, геометры достигли, благодаря искусственнымъ пріемамъ и остроумнымъ обходамъ, умѣнья вычислять, если не точно, то, по крайней мѣрѣ, съ весьма достаточнымъ приближеніемъ, очень большое число интеграловъ, а также рѣшать важнѣйшіе вопросы математики и физики. Работы настоящаго столѣтія если не привели ни какому новому понятію, подобному понятіямъ введеннымъ Декартомъ и Лейбницомъ то, всетаки, обратятъ на себя вниманіе потомства чудеснымъ развитіемъ приложеній идей, зародившихся прежде.

Взаимоотношеніе между дифференцированіемъ и интегрированіемъ о которомъ я только что говорилъ, не очевидно *a priori*, какъ умноженія и дѣленія; но при нѣкоторомъ вниманіи его не трудно открыть. Въ самомъ дѣлѣ, приращеніе функціи равно произведенію ея производной на приращеніе независимой перемѣнной плюсъ нѣкоторое количество стремящееся къ нулю въ одно и то же время съ даннымъ приращеніемъ независимой перемѣнной. Предположимъ, что функція послѣдовательно возрастаетъ, начиная съ нѣкотораго значенія независимаго перемѣннаго и до другого его значенія болѣе или менѣе удаленнаго отъ перваго. Разность значеній функціи, заключающихся между этими двумя крайними значеніями независимой перемѣнной будетъ равна: 1) суммѣ произведеній, полученныхъ отъ умноженія каждаго изъ промежуточныхъ значеній функціи на промежуточное приращеніе независимой перемѣнной, 2) суммѣ членовъ, стремящихся къ нулю, при все большемъ и большемъ сближеніи сосѣднихъ значеній независимой перемѣнной или при даваніи ей возрастащихъ значеній все болѣе и болѣе близкихъ другъ другу Въ предѣлѣ всѣ эти члены уничтожатся и разность значеній функціи, заключающихся между крайними значеніями перемѣнной будетъ просто равна суммѣ произведеній, полученныхъ отъ умноженія послѣдовательныхъ значеній функціи на безконечно малое приращеніе перемѣнной. Иначе говоря, эта разность будетъ равна интегралу функціи; и наоборотъ, самая функція будетъ настоящей производной предположеннаго количества.

Слѣдовательно, отысканіе интеграла функціи сводится къ отысканію количества, производная котораго равнялась бы этой функціи. Точно такъ же какъ отысканіе корня сводится къ отысканію количества, степень котораго равнялась бы данному числу. Слѣдовательно взаимоотношеніе между этими двумя дѣйствіями полное. Если я нашелъ нужнымъ доказать ее наглядно, то не съ цѣлью вступить на техническую почву, а чтобы еще разъ показать тотъ умственный процессъ, помощью котораго мы соединяемъ наши знанія въ парныя группы, содержащія каждая по два взаимообразныя члена. Природа, въ своихъ проявленіяхъ, повидимому часто обнаруживала аналогическій ходъ развитія. Независимо отъ великаго закона дѣйствія и противодѣйствія она показываетъ намъ въ физикѣ противоположныя электричества (я пользуюсь старой терминологіей), а въ химіи—соединенія кислотныя и основныя. Я могъ бы привести также и множество другихъ примѣровъ того же рода.

Есть еще другое предложеніе, къ которому я обращусь, несмотря на его нѣсколько сухую форму, потому что оно въ высшей степени ярко освѣщаетъ механизмъ вычисленія безконечно малыхъ.

Послѣдовательные дифференціалы функціи располагаются въ томъ же порядкѣ величины, какъ и безконечно малыя количества. Первый дифференціалъ есть безконечно малое перваго порядка; второй дифференціалъ - безконечно малое второго порядка; третій—безконечно малое третьяго порядка и такъ дальше.

Такая форма уменьшенія не распознается съ перваго взгляда. Казалось бы скорѣе, что второй дифференціалъ (разность между двумя первыми дифференціалами соотвѣтствующими двумъ послѣдовательнымъ значеніямъ перемѣнной) долженъ быть одинаковаго порядка съ этими дифференціалами, т. е., долженъ быть, какъ и они, безконечно малымъ перваго порядка. Почему же онъ будетъ второго? Припомнимъ, что первый дифференціалъ равняется произведенію производной функціи на приращеніе независимой перемѣнной. Если мы возьмемъ значенія этой производной функціи, соотвѣтствующія двумъ послѣдовательнымъ значеніямъ независимой перемѣнной, то разность между ними, по закону образованія дифференціаловъ, будетъ выражаться производной, взятой отъ первой производной функціи или второй производной функціей, помноженной на приращеніе независимой перемѣнной. Слѣдовательно, второй диф-

ференціалъ выразится посредствомъ произведенія второй производной на квадратъ приращенія независимой перемѣнной, а потому и будетъ безконечно малымъ второго порядка. То же самое разсужденіе можетъ быть приложено и къ слѣдующимъ дифференціаламъ.

Чрезвычайно замѣчательно, что, хотя производныя высшія первой опредѣляются независимо отъ приращеній первоначальной функціи и, съ другой стороны, хотя дифференціалы высшіе перваго выводятся безъ отношенія къ производнымъ, но между этими, повидимому, чуждыми одно другому количествами, существуетъ то же простое и гармоническое отношеніе, которое образуетъ производную перваго порядка. Слѣдоватлеьно, связь между послѣдовательными производными оказывается еще болѣе тѣсной, чѣмъ это можно было предположить, судя по ихъ собственному опредѣленію. По этому нѣкоторые изъ математиковъ и хотѣли поступить наоборотъ т. е., опредѣлить производныя на основаніи этого самого отношенія. Но такой путь оказывается болѣе искусственнымъ и притомъ онъ обязываетъ доказать впослѣдствіи, что производная какого-либо порядка есть производная отъ предыдущей производной.

Порядокъ уменьшенія дифференціаловъ дѣлаетъ ихъ необыкновенно удобными для выраженія безконечно малыхъ величинъ различныхъ категорій, которыя встрѣчаются въ геометрическихъ фигурахъ или въ явленіяхъ природы. Такъ, напримѣръ, когда движущееся тѣло находится подъ вліяніемъ постоянной силы приращеніе его скорости въ разсматриваемое мгновеніе представляетъ собою безконечно малое перваго порядка и выражается первымъ дифференціаломъ. Измѣненіе же приращенія между двумя послѣдовательными мгновеніями есть безконечное малое второго порядка и выражается вторымъ дифференціаломъ. Точно такъ же, когда опоражнивается сосудъ чрезъ отверстіе, сдѣланное въ его днѣ, замедленіе истеченія, замѣчаемое въ два послѣдовательныя мгновенія, представляетъ собою дифференціалъ второго порядка

Поэтому справедливо говорятъ, что анализъ безконечно малыхъ одинаково хорошо приспособленъ какъ къ явленіямъ природы, такъ и къ раціональнымъ понятіямъ. Повидимому, онъ образуетъ соединительное звено между человечѣскимъ разумомъ и внѣшнимъ міромъ, а это далеко не моловажная его рекомендація.

ГЛАВА VIII.

Анализъ безконечно малыхъ и матерія.

Анализъ безконечно малыхъ основывается на понятіяхъ о непрерывности и дѣлимости до безконечности. Какимъ же образомъ эти способы достигли своего примѣненія въ матеріальномъ мірѣ, гдѣ нѣтъ ни непрерывности ни безконечнаго дѣленія?

Прежде всего мы должны провести различіе, между тѣлами и происходящими въ нихъ явленіями.

Тѣла, какъ части различнымъ образомъ сгруппированной матеріи, всѣ безъ исключенія не допускаютъ непрерывности. Иногда даже пустоты въ нихъ значительно преобладаютъ надъ матеріей. Слѣдовательно, фигура тѣла имѣетъ обманчивый видъ. У насъ нѣтъ передъ глазами объема, который былъ бы дѣйствительно наполненъ матеріей, мы видимъ лишь геометрическую форму, образуемую соединеніемъ болѣе или менѣе отдаленныхъ одна отъ другой частичекъ. Кажущійся объемъ всегда больше того, который заняла бы матерія въ томъ случаѣ, если бы она была сжата такимъ образомъ, чтобы между частицами не оставалось бы никакого промежутка. Не только приложеніе анализа безконечно малыхъ, но и приложеніе всякаго математическаго метода къ измѣренію поверхностей и объемовъ не можетъ дать здѣсь строго точныхъ результатовъ. То же самое слѣдуетъ сказать и по поводу приложенія всѣхъ способовъ, стремящихся къ опредѣленію плотностей. Полученныя цыфры относятся къ тѣламъ кажущимся и фиктивнымъ, а не къ самой матеріи, изъ которой тѣла состоятъ, и съ которой мы воображаемъ себѣ, что имѣемъ дѣло.

Но жизненная практика и потребности искусства не требуютъ отъ насъ, въ большинствѣ случаевъ, слишкомъ мелочной точности. Поэтому то мы и соглашаемся вообще считать тѣла такими, какими они намъ кажутся. Мы не обращаемъ вниманія, особенно въ жидкостяхъ и во множествѣ твердыхъ тѣлъ, на пустоты, которыя могутъ существовать между частицами, а тѣмъ болѣе между элементами, образующими молекулу. Мы разсуждаемъ такъ, какъ будто матерія распредѣлена равномѣрно во всемъ объемѣ тѣла, безъ нарушенія непрерывности. Однимъ словомъ, мы замѣняемъ реальное тѣло своего рода *среднимъ* тѣломъ и наши опредѣленія относятся съ этихъ поръ къ среднимъ тѣламъ.

Плотность, теплоемкость, сцѣпленіе относятся не къ тому веществу, которое образуетъ тѣло, но абсолютное значеніе этихъ свойствъ уменьшено въ отношеніи теоретическаго, заполненнаго матеріей объема къ кажущемуся. Поверхность тѣла мы опредѣляемъ, не принимая въ расчетъ промежутковъ между частицами и считая ее какъ бы сплошь состоящей изъ матеріи.

Этотъ способъ не встрѣчаетъ затрудненій на практикѣ и потому признается законнымъ. Кромѣ того, часто было бы невозможно поступать иначе, потому что мы не въ состояніи изолировать матерію и изучать ее въ состояніи совершенной непрерывности. Для насъ важно знать свойства тѣлъ не теоретическихъ, а такихъ, какими они встрѣчаются въ природѣ. Они одни лишь имѣютъ значеніе для нашихъ нуждъ, а во многихъ случаяхъ даже и для нашихъ научныхъ умозрѣній. Гипотеза о равномѣрномъ и непрерывномъ распредѣленіи матеріи, приводящая къ построенію средняго тѣла, находится въ согласіи съ дѣйствительностью нашихъ впечатлѣній и съ требованіями нашихъ способовъ опредѣленія.

Къ такимъ то образамъ представляемымъ тѣламъ анализъ безконечно малыхъ и прилагается со всей строгостью. Измѣреніе поверхностей и объемовъ оказывается, именно, въ этомъ случаѣ нисколько не труднѣе измѣренія геометрическихъ тѣлъ. То же самое относится и къ плотности, являющейся результатомъ прямого измѣренія вѣса, отнесеннаго къ объему, или также къ теплоемкости, происходящей отъ измѣренія количества теплоты, отнесенной къ объему или вѣсу.

Я подхожу теперь къ классу фактовъ, гдѣ анализъ безконечно малыхъ примѣняется естественно, такъ что не приходится даже дѣлать гипотезу, подобную той, которая имѣла въ виду физическое строеніе тѣлъ. Я хочу говорить о безчисленномъ множествѣ явленій, зависящихъ отъ времени и, въ частности, о тѣхъ, которыя содержатъ въ себѣ идею движенія.

Когда тѣло перемѣщается въ пространствѣ, его траекторія, его скорость, измѣненія этой скорости суть количества непрерывныя. Иначе могло бы быть лишь въ томъ случаѣ, если бы тѣла обладали свойствомъ вдругъ измѣнять скорость или направленіе движенія въ недѣлимое мгновеніе. Но опытъ показываетъ, что этого никогда не бываетъ. Въ явленіяхъ, происходящихъ наиболѣе быстро, въ тѣхъ, которыя назывались прежде *мгновенными*, какъ напримѣръ, удары, взрывы, всегда проходитъ конечный промежутокъ

времени. Химическія реакціи, обыкновенно столь быстрыя, совершаются также въ извѣстный срокъ. Нельзя даже сказать навѣрное, что бы скорость, съ которой молекулы устремляются одна къ другой, была очень велика, принимая во вниманіе незначительость разстоянія между ними.

Наконецъ, чѣмъ больше мы возвышаемся надъ ограниченнымъ горизонтомъ, внутри котораго развивается наша жизнь, тѣмъ болѣе мы чувствуемъ, насколько относительны эти вопросы о скорости. Если мы окинемъ взоромъ достаточно обширныя части вселенной, то слова утрачиваютъ ихъ обыкновенный смыслъ. Движенія, которыя мы называемъ быстрыми, повидимому, совершаются съ невыносимой медленностью. Нѣтъ, конечно, ничего мгновеннѣе передачи свѣта на нашемъ земномъ шарѣ, который можетъ пробѣжать двадцать разъ длину земной оси менѣе, чѣмъ въ секунду времени. Но наше впечатлѣніе уже измѣняется, когда мы вспоминаемъ, что этотъ же самый свѣтъ употребляетъ четыре часа для того, чтобы пройти разстояніе отъ солнца до планеты Нептунъ. Но что это въ сравненіи съ тѣми тридцатью тысячами лѣтъ, которыя требуются, по словамъ астрономовъ для того, чтобы свѣтъ могъ пройти отъ одного края млечнаго пути до другого? Въ самомъ дѣлѣ, если бы мы остановились нашей мыслью только на этой цыфрѣ, оставляя безъ вниманія другіе пункты, съ которыми намъ надо считаться, то мы, пожалуй, были бы склонны найти, что свѣтъ физическій агентъ, распространяющійся очень медленно.

Элементы динамическихъ явленій—скорость, траекторія, ускореніе, представляютъ собою, такимъ образомъ, непрерывныя величины въ продолженіе болѣе или менѣе короткихъ промежутковъ времени, но всегда конечныя. Силы, съ своей стороны, дѣйствуютъ непрерывно, непрерывно же совершаются и перемѣны въ ихъ напряженіи. Большая часть ихъ—всемірное тяготѣніе, молекулярное притяженіе суть функціи разстояній; между двумя частями матеріи напряженіе силы измѣняется сообразно раздѣляющему ихъ разстоянію. Такъ какъ это разстояніе, подобно всѣмъ геометрическимъ величинамъ, подчиняется закону непрерывности, то и измѣненія силъ непрерывны, въ свою очередь. Къ тому же, ихъ дѣйствіе никогда и не кажется перемежающимся или происходящимъ небольшими скачками. Астрономы въ ихъ вычисленіяхъ разсматриваютъ тяготѣніе, какъ силу измѣняющуюся исключительно въ зависимости отъ разстоянія.

Имъ никогда и въ голову не приходило предположить, что бы эта сила испытывала перемѣны, что бы она прекращала свое дѣйствіе и снова начинала дѣйствовать черезъ малые промежутки времени. Самыя тонкія наблюденія никогда не показывали, чтобы вѣсъ тѣла измѣнялся въ продолженіе того времени, пока оно остается подвѣшеннымъ. Напротивъ, пружина, къ которой оно прикрѣплено, принявъ форму соотвѣтствующую состоянію ея равновѣсія, сохраняетъ ее неопредѣленно долгое время, находясь подъ вліяніемъ тяжести.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ напряженіе силъ увеличивается постепенно, вслѣдствіе наклоненія матеріи. Такъ бываетъ съ вѣсомъ сосуда, наполняющгося мало-по-малу такъ же бываетъ съ давленіемъ, производимымъ на стѣнку постояннымъ притокомъ газа или пара. Строго говоря, можно было бы утверждать, что такъ какъ жидкость или газъ состоитъ изъ отдѣльныхъ частичекъ, то приращеніе тяжести или давленія происходитъ посредствомъ небольшихъ послѣдовательныхъ прибавокъ, и что математической непрерывности не существуетъ. Но кто не замѣтитъ въ этомъ предположеніи обыкновенной игры воображенія, на которую не стоитъ обращать большого вниманія? Явленія происходятъ такъ, какъ если бы непрерывность была для насъ реальна; сдѣланная погрѣшность гораздо ниже той, которая произошла бы при самыхъ усовершенствованныхъ способахъ измѣренія. Тѣмъ съ большимъ правомъ это заключеніе примѣняется къ особенно тонкимъ физическимъ агентамъ, къ теплотѣ, электричеству. Нужно имѣть очень большую склонность къ парадоксамъ, чтобы утверждать, будто накопленіе теплоты не происходитъ непрерывно, а будто бы оно является результатомъ ряда вибрацій, различіе между которыми должно быть принято въ разсчетъ.

Такимъ образомъ, явленія, связанныя съ идеей послѣдовательности, измѣненія, происходящія во времени, намъ кажутся непрерывными. Если они не таковы въ математически точномъ смыслѣ слова, то во всякомъ случаѣ они обладаютъ приближеніемъ, далеко превосходящимъ точность нашихъ способовъ наблюденія и предохраняющимъ вычисленіе отъ замѣтной ошибки.

Эта непрерывность—общій законъ физическаго міра—признавалась еще учеными и философами древности. Гораздо раньше чѣмъ оно было доказано съ помощью точныхъ способовъ—изреченіе: *Natura non facit saltum*, „природа не дѣлаетъ скачковъ“, было высказано, какъ аксіома. Это

глубоко вкоренившееся вѣрованіе не должно было быть чуждымъ тому направленію, которое Лейбницъ далъ умозрѣніямъ, вдохновлявшимся преимущественно принципомъ непрерывности.

Признаніе подобнаго принципа, предшествовавшее въ исторіи человѣчества научнымъ свѣдѣніямъ, объясняется довольно легко. Въ самомъ дѣлѣ, онъ соотвѣтствуетъ естественному расположенію нашего духа, съ которымъ намъ было бы очень трудно бороться. Во всякомъ событіи, идетъли рѣчь о движеніи или о перемѣнѣ состоянія, формы, температуры, мы склонны приписывать наблюдаемое дѣйствіе совокупности двухъ факторовъ: нѣкоторой силѣ и времени. Ни одинъ изъ этихъ факторовъ, какъ намъ кажется, не можетъ быть исключенъ. Для того, чтобы время было безконечно мало, нужно, чтобы сила была безконечно велика. Но въ области физики мы не допускаемъ существованія безконечно большой силы, и не только мы его не допускаемъ, но мы его даже не постигаемъ. Поэтому всякая замѣчаемая перемѣна требуетъ, по нашему мнѣнію, извѣстнаго промежутка времени. Если прежде и употребляли выраженіе мгновенной, то оно въ умѣ философовъ, безъ сомнѣнія, имѣло смыслъ относительный: оно выражало, что время было весьма мало, что его не было возможности наблюдать обыкновенными средствами.

Необходимость времени для совершенія явленій должна была внушить подозрѣніе, еще раньше указаній физики и химіи, объ отсутствіи непрерывности въ тѣлахъ. Потому что, повидимому, невозможно объяснить, безъ этого, извѣстное число фактовъ, свидѣтелями которыхъ мы являемся ежедневно. Когда два тѣла, движущіяся съ различными скоростями сталкиваются другъ съ другомъ, то измѣненіе ихъ скоростей, вслѣдствіе этого удара, требуетъ нѣкотораго времени, правда очень короткаго. Но какимъ образомъ, въ продолженіе даже весьма короткаго промежутка времени, оба тѣла могли бы остаться во взаимномъ прикосновеніи, если бы они обладали безусловно неизмѣнной формой и были непроницаемы одно для другого? Очевидно, что въ этомъ случаѣ они соприкасались другъ съ другомъ лишь въ продолженіе недѣлимаго мгновенія, слѣдовательно, недостаточнаго для измѣненія скорости. Это измѣненіе требуетъ взаимнаго проникновенія, деформаціи, во время которой оба тѣла могли бы продолжать движеніе въ различныхъ направленіяхъ, не переставая, тѣмъ не менѣе, оказывать влія-

ніе другъ на друга. Явленіе совершается дѣйствительно такъ, и тѣла оказываются, въ концѣ концовъ, обладающими скоростями не рѣдко противоположными тѣмъ которыя у нихъ были вначалѣ.

Но проникновеніе предполагаетъ внутреннее строеніе, позволяющее матеріальнымъ частицамъ приблизиться другъ къ другу. Въ нормальномъ состояніи онѣ должны, слѣдовательно, удерживаться на извѣстномъ разстояніи при помощи взаимнообратныхъ силъ. Эти послѣднія обезпечиваютъ въ одно и то же время общее постоянство тѣла и его способность деформаціи. Онѣ дѣйствуютъ на подобіе пружинъ, которыя то остаются сжатыми или изломанными послѣ удара, то принимаютъ свой первоначальный видъ, смотря по природѣ вещества. На какія бы точки зрѣнія мы не становились тѣло должно обладать прерывностью.

Этотъ примѣръ разсужденія, оправданный впослѣдствіи опытомъ, не представляетъ собою исключенія въ исторіи науки. Человѣкъ часто поступаетъ такимъ образомъ: онъ дѣлаетъ попытку объяснить себѣ явленія природы и эти объясненія служатъ ему рудоводителями въ его будущихъ наблюденіяхъ. Но эти послѣднія произносятъ уже окончательный приговоръ. Разумъ не способенъ самъ по себѣ установить физическую истину: онъ доставляетъ лишь большія или меньшія вѣроятности. Ошибка древнихъ, сохранившаяся до нашего времени, состояла въ вѣрованіи, что метафизика можетъ замѣнить изученіе природы, между тѣмъ какъ она ограничивается тѣмъ, что проливаетъ свѣтъ на тѣ тропинки, которыя ведутъ къ открытію ея законовъ. Во всякомъ случаѣ философы не остаются равнодушными къ такимъ счастливымъ встрѣчамъ, (о которыхъ я еще буду имѣть случай говорить снова) между человѣческимъ разумомъ и внѣшнимъ міромъ. Подобныя встрѣчи зарождаютъ мысль объ общемъ планѣ, которому, какъ кажется, подчиняются одинаково какъ человѣческій разумъ, такъ и внѣшній міръ, и который время отъ времени, повидимому, обнаруживается нашему взору чертами, необъяснимыми случайностью.

Итакъ, анализъ безконечно малыхъ, созданный сначала для нуждъ геометріи и прилагавшійся со строгостью къ количествамъ, обладающимъ совершенной непрерывностью, могъ затѣмъ быть распространенъ на количества физическія. Условіе столь выгоднаго обобщенія заключается въ очень слабомъ разстояніи между идеаломъ непрерывности, представ-

ляемымъ пространствомъ и временемъ, и тѣми болѣе или менѣе прерывными матеріальными реальностями, которыми мы окружены. Величина этого разстоянія представляетъ собою степень точности, на которую мы можемъ разсчитывать въ окончательныхъ результатахъ.

Множество предметовъ, а именно тѣхъ, которые разсматриваются математическою физикой, могутъ быть разрабатываемы этимъ способомъ вычисленія съ точностью почти безпредѣльной. Вотъ почему эта отрасль знанія пріобрѣла въ послѣднее столѣтіе замѣчательное развитіе. Границы его, повидимому, еще не скоро будутъ достигнуты; потому что болѣе и болѣе точные опыты, производимые физиками и химиками, доставятъ обильные матеріалы, къ которымъ высшій анализъ можетъ быть примѣняемъ все съ большимъ и большимъ успѣхомъ.

Между науками, уже образовавшимися или же находящимися на пути къ образованію, зависящими отъ способа безконечно малыхъ, есть одна, которая останется всегда на первомъ планѣ, вслѣдствіе строгости своихъ результатовъ. Это небесная механика. Разсматриваемыя въ ней тѣла не измѣняются ни по фигурѣ, ни по величинѣ, по крайней мѣрѣ, въ продолженіе историческихъ періодовъ. Дѣйствія, относительно которыхъ эти тѣла являются источниками или театромъ, зависятъ исключительно отъ разстояній. Различные элементы динамическихъ явленій представляютъ собою, слѣдовательно, функціи пространства и времени и обладаютъ геометрической непрерывностью. Анализъ безконечно малыхъ можетъ вслѣдствіе этого быть примѣненъ здѣсь съ тою же точностью, какъ и въ вопросахъ чисто математическихъ. Причины неточности заключаются единственно въ случайномъ пропускѣ нѣкоторыхъ дѣйствительныхъ элементовъ или же въ ошибкахъ, которыя могутъ вкрасться во время столь чудесныхъ вычисленій. Но они никоимъ образомъ не происходятъ вслѣдствіе основной гипотезы, которая, относительно непрерывности, уподобляетъ ихъ отвлеченнымъ величинамъ геометріи и алгебры. Небесная механика сохранитъ, слѣдовательно, неоспоримое первенство въ ряду всѣхъ отраслей математической физики.

II.

МЕХАНИКА.

ГЛАВА I.

Сила и масса.

Подобно тому какъ пространство и время служатъ основанiемъ математическихъ наукъ, такъ сила и масса представляютъ собою первичные элементы наукъ физическихъ и въ частности механики, разсматриваемой въ наибольшей своей общности. Нѣтъ ни одного вопроса Динамики, какъ бы сложенъ онъ ни былъ, который не приводился бы въ концѣ концовъ къ вычисленiю отношенiя между силой и массой.

Понятiе о силѣ такъ же древне, какъ и человѣчество. Съ первыхъ шаговъ своихъ въ жизни и вслѣдствiе борьбы съ природой, человѣкъ прiобрѣтаетъ чувство усилiя, которое ему приходится употреблять, чтобы приблизить къ себѣ или удалить отъ себя то или другое тѣло, чтобы передвинуть его съ одного мѣста на другое и чтобы сообщить ему скорость.

Тѣла, на которыя мы дѣйствуемъ, находятся въ различныхъ условiяхъ, и это необходимо обнаруживается на результатахъ нашихъ усилiй.

Чаще всего они удерживаются препятствiями. Чтобы перемѣстить ихъ необходимо бываетъ преодолѣть нѣкоторыя внѣшнiя сопротивленiя. Нужно, напримѣръ, преодолѣть тренiе ихъ о другiя тѣла, уравновѣсить силу тяжести на плоскости, болѣе или менѣе наклонной, сжать жидкость или газъ и т. д. Тѣла приходятъ тогда въ движенiе лишь въ томъ случаѣ, когда усилiе превзойдетъ нѣкоторую степень напряженiя, именно, ту, которая соотвѣтствуетъ сопротивленiю, развившемуся подъ влiянiемъ совокупности препятствiй. Послѣ достиженiя этого предѣла движенiе бу-

детъ происходить. Но какимъ образомъ оно возникаетъ? Въ какомъ отношенiи находится оно къ потраченнымъ на него усилiямъ?

Чтобы лучше отдать себѣ въ этомъ отчетъ, мы предпочитаемъ исключить этотъ предварительный перiодъ, впродолженiе котораго сила должна увеличиваться, прежде нежели произвести какое-нибудь замѣтное дѣйствiе, достигнуть суммы сопротивленiй, оказываемыхъ окружающей средой. Представимъ себѣ, такимъ образомъ, тѣло, не встрѣчающее никакихъ препятствiй, совершенно свободное, такое, какимъ бы оно было, если бы, какъ я предполагаю, оно катилось по горизонтальной, совершенно гладкой плоскости, или еще лучше, если бы оно было подвѣшено въ пустотѣ на концѣ очень тонкой нити. Что же мы видимъ тогда? Мы видимъ, что *малѣйшее усилiе производитъ движенiе.* Нѣтъ такого ничтожнаго побужденiя, которое не вывело бы тѣло изъ его положенiя. Оно абсолютно подвижно. Сопротивленiе движенiю, которое, повидимому, оно только-что оказывало, и которое мы могли быть склонны всецѣло приписать ему, зависило отъ влiянiя внѣшнихъ причинъ, а не отъ самого тѣла. Само по себѣ тѣло не оказываетъ сопротивленiя. Оно не способно къ нему.

Подвижность, совершенная, абсолютная подвижность— таково основное свойство тѣлъ, которое представляетъ существенный интересъ для геометра. Именно благодаря ихъ подвижности мы проникаемъ, такъ сказать, въ близкое отношенiе къ нимъ и вступаемъ съ ними въ общенiе. Что могли бы мы заключить изъ тѣла, которое сопротивлялось бы всѣмъ попыткамъ привести его въ движенiе? Мы установили бы, что оно является препятствiемъ; но что же скрывается за этимъ препятствiемъ, за этой поверхностью, о которую тщетно разбиваются всѣ наши усилiя? Каково это тѣло—тяжело ли оно болѣе или менѣе, пусто ли, наполнено ли чѣмъ-нибудь? Мы объ этомъ ничего не знаемъ. Напротивъ, если тѣло легко уступаетъ нашимъ усилiямъ, мы вступаемъ съ нимъ въ отношенiе. Мы чувствуемъ, что его движенiе измѣняется по волѣ нашихъ усилiй. Потому что подвижность тѣла не есть его безразличное состоянiе. Оно не повинуется одинаково всѣмъ импульсамъ. Подъ влiянiемъ болѣе энергическаго импульса оно движется скорѣе, нежели подъ влiянiемъ болѣе слабаго. Въ то же время мы наблюдаемъ, что тѣла находятся далеко не въ одинаковомъ состоянiи подъ дѣйствiемъ одного и того же

усилія. При равныхъ объемахъ они требуютъ, для того чтобы придти въ одинаковыя движенія, различныхъ усилій, смотря по своей природѣ. Кубическій дециметръ свинца требуетъ большаго усилія, чѣмъ кубическій дециметръ дерева или стекла. Если они одинаковы по природѣ, то требуютъ затраты усилій, пропорціональной ихъ объему.

Изъ этого элементарнаго явленія возникаютъ два параллельныхъ понятія, въ высшей степени важныхъ. Первое понятіе о градаціи усилій, способныхъ вызывать дѣйствія пропорціональныя ихъ напряженію. Мы представляемъ себѣ двойное, тройное, четверное усиліе по отношенію къ первому, избранному нами членомъ сравненія или единицей. Если, напримѣръ, мы примемъ за единицу усиліе, которое будетъ удерживать нѣкоторую пружину въ состояніи напряженія, то усиліе, удерживающее въ состояніи напряженія сразу двѣ, три, четыре подобныхъ пружины, выразитъ собою двойное, тройное, четверное усиліе сравнительно съ предыдущимъ; и мы знаемъ, что эти усилія произведутъ очень различныя механическія дѣйствія. Съ другой стороны, мы видѣли, что тѣла, смотря по ихъ природѣ или объему, требуютъ затраты различныхъ усилій для сообщенія имъ одного и того же движенія. Это свойство, вслѣдствіе котораго тѣло требуетъ извѣстнаго усилія или нѣкотораго импульса, чтобы прійти въ опредѣленное движеніе, представляетъ собою то, что называется *массой*. Слѣдствіемъ этого является выводъ, что два тѣла, какого бы рода и какихъ бы размѣровъ они ни были, имѣютъ одну и ту же массу, если приходятъ въ одинаковое движеніе отъ затраты одного и того же усилія.

Массы тѣлъ служатъ, слѣдовательно, выраженіемъ ихъ относительной подвижности или, говоря точнѣе, онѣ измѣняются въ обратномъ отношеніи къ этой послѣдней. Двойная масса или другими словами масса, требующая двойныхъ усилій для того, чтобы придти въ одинаковое движеніе съ единицей массы, обладаетъ и подвижностью вдвое меньшей. Очень большой массѣ соотвѣтствуетъ очень слабая подвижность. Идея массы является во всѣхъ отношеніяхъ связанной съ представленіемъ о ея подвижности. Нѣтъ массы, которая бы не обладала подвижностью, и *наоборотъ*. Никогда масса, какъ бы громадна она ни была, не вызоветъ идеи сопротивленія. Сопротивленіе никогда не находится въ тѣлѣ; оно *внѣ* тѣла. Если масса требуетъ усилія, то не для того, чтобы оказать ему сопротивленіе, а чтобы усту-

пить ему, чтобы придти въ соотвѣтствующее ему движенiе.

Но недостаточно имѣть одно лишь ясное понятiе о массѣ. Надо идти дальше. Для нуждъ динамики необходимо умѣть выражать массы въ числахъ, *шифровать* ихъ, опредѣлять ихъ посредствомъ одной изъ нихъ, однимъ словомъ, сдѣлать ихъ совершенно сравнимыми между собою, независимо отъ всякихъ физическихъ или химическихъ свойствъ, отличающихъ одно тѣло отъ другого. Съ точки зрѣнiя геометрiи, тѣла различаются одни отъ другихъ лишь ихъ массами, ихъ способностью приходить въ движенiе.

Чтобы достигнуть такого рода спецiальной классификацiи, слѣдуетъ прежде всего устранить немного узкое представленiе объ усилiи, напоминающее о своемъ спецiальномъ, человѣческомъ происхожденiи. Въ сущности, вопросъ о происхожденiи импульса не важенъ для математика. Его интересуютъ только напряженность его дѣйствiя, его направленiе. Будетъ ли импульсъ произведенъ рукой человѣка, силой тяги животнаго, давленiемъ воздуха или пара, вѣсомъ, магнитомъ и т. д., результатъ останется всегда тотъ же. Лишь бы только напряженiе было одинаково, тѣло, на которое произведено дѣйствiе, придетъ въ одно и то же движенiе. Такимъ образомъ, общая идея *силы* и замѣняетъ собою въ наукѣ частную идею усилiя, и всѣ силы становятся сравнимыми между собою безъ отношенiя къ ихъ происхожденiю, которое больше не обращаетъ на себя вниманiя.

Я говорю о напряженiи. Но слѣдуетъ разсмотрѣть еще другой элементъ—время. Чтобы опредѣлить дѣйствiе силы, нужно умѣть означать время, въ продолженiе котораго сила дѣйствуетъ. Потому что, по мѣрѣ продолженiя времени, произведенное дѣйствiе или сообщенное движенiе является все болѣе значительнымъ. Слѣдовательно, при сравненiи силъ между собою подразумѣвается, что онѣ дѣйствуютъ впродолженiе одного и того же времени. Впрочемъ, все равно, какова сама по себѣ величина даннаго промежутка времени, лишь бы онъ былъ одинаковъ во всѣхъ опытахъ.

Теперь уже легко себѣ представить процессъ сравниванiя массъ. Для осуществленiя его можно вообразить себѣ пружину, находящуюся въ состоянiи напряженiя, спускъ которой производитъ извѣстный импульсъ, а затѣмъ соединить двѣ, три подобныхъ же пружины, для того чтобы получился двойной, тройной импульсъ. Можно бы также представить себѣ взрывъ въ трубкѣ опредѣленнаго количества

пороха, и потомъ взрывъ двойного, тройного количества его: тогда давленіе газа на поршень произвело бы импульсы, представляемыя числами одинъ, два три и т д. Тѣмъ или другимъ изъ этихъ способовъ различныя тѣла могутъ быть подвергнуты различнымъ импульсамъ, размѣреннымъ такъ, чтобы всѣ тѣла пришли въ одинаковое движеніе. Ихъ массы будутъ пропорціональны импульсамъ; а отношенія между массами будутъ равны отношеніямъ между импульсами.

Сравненіе между собою массъ, такимъ образомъ, сводится къ сравненію силъ. Масса тѣла съ этого времени характеризуется величиной силы, сообщающей ей соотвѣтственное движеніе. Ея числовое значеніе зависитъ въ одно и тоже время и отъ выбора единицы силы и отъ амплитуды соотвѣтствующаго движенія, и принятаго также за единицу.

Единица силы можетъ быть взята произвольно въ природѣ. Она можетъ представлять собою усиліе, необходимое для взрыва металлической проволоки опредѣленной толщины; давленіе, на какую-нибудь поверхность, газа или пара при извѣстной температурѣ; спускъ пружины, построенной при опредѣленныхъ условіяхъ; силу, которую развиваютъ для поддержанія на вѣсу нѣкотораго опредѣленнаго тѣла. Слѣдуетъ обратить вниманіе на то, что нѣкоторыя единицы, какъ, напримѣръ, послѣдняя, подвержены измѣненіямъ, смотря по мѣсту производства опыта на земномъ шарѣ. Другія же, какъ, напримѣръ, три первыя, имѣютъ повсюду одну и ту же присущую имъ величину. Если желаютъ сравнить массы, измѣренныя въ одномъ мѣстѣ, съ массами, измѣряемыми въ другомъ, то необходимо будетъ, въ случаѣ надобности, принять въ расчетъ измѣненіе претерпѣваемое выбранной единицей силы.

Общее движеніе подвергаемыхъ опытному изслѣдованію массъ, или величина сообщенной имъ скорости, принимаемая нами условнымъ образомъ за единицу длины, можетъ также быть выбрана по нашему произволу. Это будетъ метръ, туазъ, футъ или какая-нибудь другая заранѣе назначенная единица.

Разъ эти единицы выбраны, единица массы вытекаетъ изъ нихъ; ее опредѣляютъ путемъ опыта. Для этого надо будетъ найти, при помощи спеціальныхъ наблюденій, тѣло, которое подъ вліяніемъ единицы силы, въ теченіе единицы времени, пріобрѣтаетъ скорость, равную единицѣ длины.

Физики установили, что если за единицу силы принять

усиліе, способное поддержать на вѣсу кубическій дециметръ воды, за единицу времени астрономическую секунду, а за единицу длины—метръ или сорока милліонную часть земного меридіана, то искомое тѣло представляется количествомъ воды немного меньшимъ 10-ти кубическихъ дециметровъ, или 9,8088..... литрами. Число это обыкновенно обозначается буквой g. Вотъ какова единица массы. Массы всѣхъ другихъ тѣлъ выражаются посредствомъ этой единицы, взятой слагаемымъ нѣсколько разъ.

Такъ какъ единица сылы заимствована у явленій тяжести и измѣняется вслѣдствіе этого съ широтою мѣста на земномъ шарѣ, то цифры, выражающія массы, опредѣленныя въ данномъ мѣстѣ, должны подвергнуться исправленію для того чтобы ихъ можно было сравнивать съ другими значеніями массъ, опредѣленными въ другомъ мѣстѣ. Мы оставимъ въ сторонѣ эту поправку, относящуюся исключительно къ единицѣ силы и имѣющую цѣлью исправить ея случайныя неравенства.

Величина массы повсюду одинакова. Лишь бы тѣло находилось подъ дѣйствіемъ одной и той же силы, оно всегда пріобрѣтаетъ одинаковую скорость—въ какой-бы точкѣ земного шара ни находилось — во Франціи, въ Америкѣ, у полюса, на экваторѣ—все равно. Если, напримѣръ, спускаютъ пружину (что исключаетъ поправку единицы силы), то это спусканіе, примѣненное послѣдовательно въ различныхъ мѣстахъ, сообщитъ тѣлу всегда одну и ту же скорость. Оно сообщало бы тѣлу ту же скорость даже и въ томъ случаѣ, если бы для естествоиспытателя явилась возможность перенестись въ нѣдра земли или на поверхность какой-нибудь другой планеты. Скорость эта не измѣняется. Она вытекаетъ изъ высшаго закона природы. Она выражаетъ вѣчное отношеніе даннаго импульса къ опредѣленному тѣлу. Причина этого отношенія намъ не извѣстна, точно такъ же какъ неизвѣстна причина отношенія, существующаго между нѣкоторымъ количествомъ теплоты и соотвѣтствующимъ ему количествомъ движенія, между нѣкоторымъ повышеніемъ температуры и увеличеніемъ давленія газа. Причины, „*почему*“ этихъ вещей, безъ сомнѣнія, будутъ отъ насъ скрытыми всегда. Мы можемъ только установлять факты изъ существованія и опредѣлять ихъ коэффиціенты.

Но всего замѣчательнѣе независимость массы отъ обстоятельствъ, способность влiять на состояніе тѣла; хотя это свойство можетъ принадлежать не одной только массѣ, а и другимъ

отношеніямъ, но оно является для первой чрезвычайно важнымъ. Масса не только не зависитъ отъ температуры, электрическаго состоянія, сцѣпленія, жидкаго состоянія даннаго тѣла, но она независима также и отъ тяжести. Опытъ, повторенный на различныхъ точкахъ земного шара, показываетъ, что масса не зависитъ отъ широты, то есть, отъ неравенства дѣйствія самаго земного шара. А такъ какъ дѣйствіе земного шара представляетъ собою частный случай всемірнаго тяготѣнія, то отсюда слѣдуетъ, что масса исключается изъ этого общаго состоянія матеріи. Можно вообразить себѣ измѣненіе въ напряженіи тяжести, даже совершенное исчезновеніе его (которое замѣнило бы существующій порядокъ, порядкомъ, совершенно отличнымъ отъ него или скорѣе хаосомъ), но мы не въ состояніи представить себѣ исчезновеніе массы. Въ этомъ громадномъ переворотѣ, который явился бы слѣдствіемъ нарушенія всемірнаго тяготенія, масса оставалась бы неприкосновенной. Одна и та же пружина, дѣйствующая на одно и то же тѣло—если бы ее удалось уберечь отъ общаго распаденія—продолжала бы сообщать ему одну и ту же скорость. Всѣ явленія измѣнились бы; одно только явленіе массы сохраняло бы свое первоначальное значеніе.

Когда подумаешь о постоянствѣ, неразрушимости массы, то невольно являетя вопросъ: не въ немъ ли заключается то свойство, которое такъ старались отыскать древніе философы, чтобы дать опредѣленіе матеріи. Сколько тщетныхъ попытокъ сдѣлали они для этого, не различая этого свойства съ достаточной ясностью! Сколько слабыхъ объясненій они предложили! Долгое время говорили: „матерія, это—то, что способно дѣйствовать на наши чувства. Но явились физики и химики и показали намъ до такой степени тонкую матерію, что она не дѣйствуетъ непосредственно на наши внѣшнія чувства, и что въ существованіи ея мы убѣждаемся лишь помощію необыкновенно деликатныхъ способовъ. Одно только прохожденіе электрическихъ лучей можетъ доказать намъ присутствіе матеріи въ необыкновенной пустотѣ, приготовленной г. Круксомъ. Физики и химики сообщили намъ о чувственныхъ образахъ о свѣтовомъ мерцаніи являющихся одной лишь видимостью и указывающихъ присутствіе матеріи тамъ, гдѣ въ дѣйствительности ея нѣтъ; такъ что это свидѣтельство чувствъ, основа и условіе опредѣленіе матеріи, было уличено въ заблужденіи. Пробовали было подойти ближе къ вопросу, приписывая матеріи свойства „протяженія“ и „непроницаемости“, но пространство про-

странство, а не матеріально. Газы матеріальны, но проницаемы. Даже твердыя тѣла и тѣ являются передъ нами, какъ совокупности частицъ, которыя могутъ приближаться одна къ другой вслѣдствіе достаточно сильнаго сжатія. Онѣ, слѣдовательно, непроницаемы лишь отчасти. Что же значитъ понимаемое такимъ образомъ свойство? Не слѣдуетъ ли его, можетъ быть, сохранить исключительно для атомовъ? Но знаемъ ли мы, что и они непроницаемы? И, потомъ, какимъ образомъ можемъ мы говорить о свидѣтельствѣ чувствъ по поводу такихъ остатковъ, которые, по своей крайней малости, ускользаютъ именно отъ всѣхъ нашихъ внѣшнихъ чувствъ?

Современная наука ввела новую точку зрѣнія. Отнынѣ великое Все, *Космосъ*, заключаетъ въ себѣ два класса предметовъ. Одни изъ нихъ болѣе или менѣе соотвѣтствуютъ нашему инстинктивному представленію о матеріи; они открываются если даже нашимъ чувствамъ, то, во всякомъ случаѣ, нѣкоторымъ изъ нашихъ научныхъ способовъ наблюденія; они подчиняются всемірному тяготѣнію; они *вѣсомы*. Другіе же предметы ускользаютъ отъ нашихъ прямыхъ средствъ наблюденія и обнаруживаются лишь благодаря своимъ дѣйствіямъ; они являются агентами или носителями тѣхъ великихъ силъ, которыя господствуютъ надъ вселенной: теплоты, свѣта, электричества, тяготѣнія и пр. Но, передавая тяготѣніе, они тѣмъ, не менѣе, не подвергаются его вліянію; они *невѣсомы*, или, по крайней мѣрѣ, таковыми кажутся. Имъ не приписывается свойствъ матеріи, оставляемыхъ только на долю первыхъ. Матерія, слѣдовательно, согласно этому воззрѣнію, есть „все, то, что имѣетъ вѣсъ“.

Кто же не видитъ глубокой разницы между общимъ, даже универсальнымъ свойствомъ, какъ тяготѣніе — безъ котораго, все-таки, можно представить себѣ матерію — и такимъ свойствомъ, какъ масса, которая намъ, по истинѣ, представляется внутренне присущимъ матеріи, которое даже составляетъ, повидимому, самое ея сущность? Если бы тяготѣніе перестало дѣйствовать, то мы отсюда еще не заключили бы, что матерія перестала существовать; она все-таки, существовала бы и требовала бы для своего движенія того же количества силы, что и раньше. Она сохраняла бы ту же массу. Не слѣдуя такъ далеко по пути гипотезъ, можно, однако, утверждать, что обитатели различныхъ планетъ, если они существуютъ и если они, подобно намъ, занимаются математической физикой, должны составить то же самое понятіе, какъ и мы, о значеніи всемірнаго тяготѣнія.

Не смотря на это, они получаютъ отъ послѣдняго совершенно иныя впечатлѣнія, чѣмъ мы. Литръ воды имъ долженъ казаться въ два съ четвертью раза тяжелѣе, чѣмъ намъ, на поверхности Юпитера; въ шесть разъ легче на поверхности луны; и, предполагая возможнымъ устроить станцію на солнцѣ,—въ двадцать семь разъ тяжелѣе на поверхности этого огромнаго шара. Разность впечатлѣній, получаемыхъ отъ вѣса литра воды обитателями луны и солнца, была бы въ отношеніи 1 къ 162. Между тѣмъ, и тотъ, и другой употребили бы одну и ту же пружину для сообщенія этому литру воды одинаковой скорости. Философъ, собравшій эти, столь различныя, впечатлѣнія, заключилъ бы, что чувство массы всегда однородно, абсолютно, тогда какъ чувство, получающееся отъ дѣйствія тяжести перемѣнно и относительно [1]). Свойство вѣсомости нельзя поэтому, сравнить съ свойствомъ обладанія массой и оно не можетъ служить въ той же степени основаніемъ для опредѣленія матеріи.

Если бы я долженъ былъ опредѣлить матерію, я сказалъ бы: „Матерія есть все то, что обладаетъ массой, или все, что требуетъ силы для того, чтобы придти въ движеніе“.

Идеи силы и массы соотносительны. Онѣ освѣщаютъ одна другую. Какое понятіе мы имѣли бы о дѣйствіи силы, о дѣйствительности нашего личнаго усилія, если бы никогда не употребляли этого усилія для того, чтобы перемѣстить тѣло? Безъ сомнѣнія, надавливая болѣе или менѣе сильно на преодолѣніе какое нибудь неподвижное препятствіе, мы получили бы чувства различныхъ усилій; но мы не замѣтили бы ихъ результата, дѣйствія, которыя они способны произвести, оставались бы намъ неизвѣстны. Мы не сознаемъ этого до тѣхъ поръ, пока не перемѣщаемъ тѣла, способнаго повиноваться нашему усилію, и перемѣщая послѣдовательно различныя тѣла, мы отдаемъ себѣ отчетъ въ неравенствѣ требуемыхъ ими отъ насъ напряженій. Въ то же время мы получаемъ понятіе о массѣ, которая пред-

---

[1]) Если бы наблюдатель могъ помѣститься между землей и луной именно въ той точкѣ, гдѣ притяженіе, испытываемое имъ отъ этихъ двухъ небесныхъ тѣлъ, уравновѣшивалось бы, то, предметы, съ которыми онъ обращался бы, оказались бы для него лишенными тяжести, а между тѣмъ, если бы онъ хотѣлъ къ нимъ приложить свою пружину онъ нашелъ бы, что они приходятъ въ то же самое движеніе или обладаютъ той же массой, какъ и на поверхности земли.

ставляетъ собой иную форму проявленія тѣлъ по отношенію къ намъ, къ нашей способности ихъ двигать. Оба понятія нераздѣльны. Каждое изъ нихъ въ отдѣльности—неполно. Каждое неизбѣжно вызываетъ другое, какъ дѣйствіе вызываетъ противодѣйствіе, какъ теплота вызываетъ температуру, какъ кислота въ химіи вызываетъ основаніе.

Нѣкоторые изъ геометровъ, и даже изъ самыхъ знаменитыхъ, ставятъ въ упрекъ этому понятію о массѣ именно то, что оно связано съ понятіемъ о силѣ; имъ хотѣлось бы опредѣленія прямого, независимаго. „*Массой* тѣла, говоритъ Пуассонъ, называется количество заключающейся въ немъ матеріи [1])“. Но что нужно разумѣть подъ выраженіемъ „количество матеріи“? Мы составляемъ себѣ правильное понятіе объ *относительныхъ* количествахъ матеріи, заключающихся въ тѣлахъ одинаковыхъ по природѣ. Мы понимаемъ безъ труда, что два литра воды содержатъ въ себѣ вдвое больше матеріи, чѣмъ одинъ литръ, и что въ пяти литрахъ ртути ее въ пять разъ больше, чѣмъ въ одномъ. Вообще, количества матеріи, заключающейся въ тѣлахъ пропорціональны ихъ объемамъ. Но какимъ образомъ сравнить въ этомъ отношеніи различныя между собою по природѣ тѣла? Какое отношеніе можетъ быть между количествомъ матеріи, заключающимся въ кубическомъ дециметрѣ воды, и количествомъ матеріи, заключающемся въ кубическомъ дециметрѣ свинца или въ томъ же объемѣ платины? Мы знаемъ лишь одно; литръ воды легче привести въ движеніе, чѣмъ литръ ртути, онъ требуетъ для этого меньшей затраты силы. Но, вѣдь, это и есть отношеніе между силой и массой. Слѣдовательно, приходится вернуться къ предварительнымъ опытамъ, устанавливающимъ это отношеніе, т. е. предыдущему опредѣленію.

Чтобы обойти трудность, тѣ же геометры воображаютъ „матеріальную точку“, одинаковую во всѣхъ тѣлахъ, и количества матеріи опредѣляются числомъ этихъ фиктивныхъ точекъ, которыя заключаютъ въ себѣ самыя разнообразныя по строенію тѣла. „Матеріальная точка, говоритъ Пуассонъ, есть тѣло безконечно малое во всѣхъ ея измѣреніяхъ. Всякое конечное тѣло можно разсматривать какъ совокупность безчисленнаго множества матеріальныхъ точекъ, а его массу— какъ сумму всѣхъ ихъ безконечно малыхъ массъ“. „Масса тѣла, говоритъ Лапласъ, есть сумма его матеріальныхъ то-

---

[1]) *Traité de Mécanique*, Introduction.

чекъ... Плотность тѣла зависитъ отъ числа его матеріальныхъ точекъ, заключающихся въ данномъ объемѣ [1]". Но этотъ способъ не устраняетъ возраженія. Всегда можно предложить вопросъ: что же такое представляетъ собою масса матеріальной точки? почему это въ литрѣ ртути, больше матеріальныхъ точекъ, чѣмъ въ литрѣ воды? Вопросъ остается безъ отвѣта.

Съ геометрической точки зрѣнія, позволительно представлять себѣ тѣло настолько малыхъ размѣровъ, что бы разность траэкторій его различныхъ частей могла быть оставлена безъ вниманія. Ничто не запрещаетъ называть такое тѣло „матеріальной точкой". Но это названіе не должно выходить за предѣлы математической абстракціи. Оно не имѣетъ значенія для дѣйствительности. Въ физическомъ мірѣ встрѣчаются одни лишь конечныя тѣла и атомы или первообразные элементы, массъ и размѣровъ которыхъ мы совершенно не знаемъ. Мы не въ состояніи сказать — по крайней мѣрѣ, до настоящаго времени — является ли первичный элементъ одного тѣла болѣе или менѣе плотнымъ сравнительно съ первичнымъ же элементомъ другого тѣла. Мы знаемъ путемъ прямого опыта только то, что весьма малые объемы свинца и платины требуютъ неравныхъ силъ, чтобы получить одинаковое движеніе, и обладаютъ, слѣдовательно, различными массами [2]).

Въ первое время возникновенія раціональной механики, существовало весьма понятное стремленіе уменьшить насколько возможно заимствованіе фактовъ изъ данныхъ опыта. Хотѣли придать этой наукѣ систематическій видъ и характеръ логики, подобные встрѣчаемымъ въ геометріи, гдѣ физическія данныя малочисленны и даже иногда проходятъ незамѣтно. Мы встрѣчаемъ признакъ этого еще и теперь въ гипотетическомъ строеніи, приписываемомъ твердымъ тѣламъ; этимъ объясняются досадныя ошибки, встрѣчающіеся въ важныхъ теоремахъ, а именно, въ теоріи удара. Прогрессъ естественныхъ наукъ стремится измѣнить эту точку зрѣнія и располагаетъ умы разсматривать отнынѣ механику, даже въ

---

[1]) Exposition du Système du Monde, 6-e èdition, p. 173 и 175.

[2]) Опредѣленіе массы при помощи числа *матеріальныхъ точекъ* было бы законнымъ лишь въ томъ случаѣ, если бы химіи удалось доказать, что всѣ тѣла одинаково по природѣ и что существуютъ въ дѣйствительности только различныя группировки одного и того же атома.

раціональной ея части, какъ науку по существу основанную на наблюденіи.

Дедуктивный методъ, единодержавно господствующій въ чистой математикѣ, плодотворенъ въ механикѣ лишь при томъ условіи, если онъ примѣняется къ дѣйствительнымъ элементамъ, доставляемымъ внѣшнимъ міромъ. Въ противномъ случаѣ онъ приводитъ насъ къ результатамъ, касающимся не въ дѣйствительности существующаго міра, а того, который намъ угодно воображать себѣ. Абстракція позволительна лишь относительно свойствъ и обстоятельствъ, чуждыхъ задачѣ динамики въ собственномъ смыслѣ слова. Въ отдѣльномъ тѣлѣ мы можемъ и должны пренебречь цвѣтомъ, температурой, химическимъ сродствомъ, потому что они не имѣютъ никакого вліянія на движеніе. Но мы принимаемъ во вниманіе инерцію или подвижность, массу, способъ сложенія силъ. Если встрѣчаются нѣсколько тѣлъ, то мы еще и другія свойства, которыми пренебрегаемъ въ тѣлѣ, разсматриваемомъ отдѣльно: взаимную реакцію ихъ, упругость и, въ случаѣ удара или тренія, превратимость движенія въ теплоту.

Поэтому не слѣдовало бы разсматривать абстрактныхъ массъ и твердыхъ тѣлъ, сохраняющихъ постоянную форму. Столь же не логично отвергать прямое понятіе о силѣ, подъ тѣмъ предлогомъ, что оно почерпнуто нами въ чувствѣ нашего личнаго усилія, т. е., въ наблюденіе природы. Почему бы не отвергать также и цвѣтовъ солнечнаго спектра по той причинѣ, что ихъ видитъ только нашъ глазъ? Опредѣляя силу, подобно нѣкоторымъ авторамъ, какъ „произведеніе массы на скорость“, развѣ мы дадимъ ясное понятіе о ней человѣку, который никогда не пробывалъ своей мускульной силы? Насколько чистая математика стремится воспарить въ область абстрактнаго, настолько же физическія науки, изъ которыхъ первая есть механика, должны пустить свои корни въ почву конкретнаго, подъ страхомъ въ противномъ случаѣ утратить основу и изсякнуть въ химерическихъ умозрѣніяхъ.

ГЛАВА II.

Динамическая способность.—Тяжесть.

Свойство массы выступаетъ болѣе ярко, когда ее наблюдаютъ въ различныхъ однородныхъ тѣлахъ одного и того же объема. Неравенство, замѣчаемое между ихъ массами, происходитъ тогда исключительно вслѣдствіе различія въ составляющей ихъ матеріи. Экспериментаторъ, снабженный пружиной, которой мы уже пользовались раньше, можетъ обнаружить, что, если кубическій дециметръ воды требуетъ силу равную единицѣ, чтобы пріобрѣсти скорость равную приблизительно 10 метрамъ (т. е. 9^m, 8088......) въ концѣ одной секунды, то кубическій дециметръ свинца потребуетъ силу равную одиннадцати съ половиною единицъ; кубическій дециметръ платины потребуетъ двадцати одной съ половиною единицъ и т. д. Каждое тѣло, смотря по его природѣ, потребуетъ для одного и того же объема различную силу.

Было бы смѣло утверждать, по моему мнѣнію, что эти кубическіе дециметры заключаютъ большее или меньшее количество матеріи. Возможно, что число недѣлимыхъ элементовъ воды будетъ одинаково съ числомъ недѣлимыхъ элементовъ свинца, ртути или платины, и что каждый изъ нихъ имѣетъ одинъ и тотъ же объемъ. Но можетъ случиться также, что число элементовъ неодинаково, но ихъ объемы различаются между собой въ обратномъ направленіи, вслѣдствіе чего абсолютный объемъ *матеріи воды*, заключающейся въ кубическомъ дециметрѣ, равенъ абсолютному объему *матеріи свинца*, *ртути* или *платины*. При этихъ условіяхъ какимъ образомъ возможно утверждать, что количество матеріи одного тѣла больше количества матеріи другого? Единственное утвержденіе допустимо въ данномъ случаѣ, это—что матерія воды находится въ другомъ отношеніи къ силамъ, чѣмъ матерія свинца, ртути или платины. Другими словами, вода, свинецъ, ртуть и различныя тѣла, при одномъ и томъ же объемѣ, поглощаютъ различныя количества силы или импульса, чтобы получить одинаковое движеніе.

Указанное явленіе аналогично тому, которое происходитъ въ физикѣ при нагрѣваніи тѣлъ. Эти послѣднія, будемъ ли мы ихъ сравнивать при одинаковомъ объемѣ или же при одинаковомъ вѣсѣ, поглощаютъ не одинаковое ко-

личество теплоты для достиженія одного и того же поднятія температуры. Они не обладаютъ, выражаясь общепринятымъ терминомъ, одинаковой калорифической способностью. Точно также въ отношеніи движенія, они не имѣютъ одной и той же *динамической способности* [1]).

Можно составить для различныхъ родовъ однородныхъ тѣлъ таблицу динамическихъ способностей, подобную таблицѣ калорифическихъ способностей. При этомъ цифры обѣихъ таблицъ не будутъ имѣть между собою никакого соотношенія, да это и не удивительно; потому что мы не видимъ необходимой связи между калорифическими вибраціями или нѣкоторымъ явленіемъ, обозначаемымъ этимъ словомъ, и большей или меньшей легкостью перемѣщенія тѣлъ. Мы замѣчаемъ даже весьма значительныя различія въ значеніи этихъ величинъ: тѣла, обладающія слабой динамической емкостью, часто отличаются очень большой емкостью калорифической. Свинецъ сравнительно съ водой, взятой въ одинаковомъ съ нимъ объемѣ, обладаетъ динамической емкостью равной одиннацати съ половиной, а его емкость калорифическая едва-едва превосходитъ одну треть. Динамическая емкость ртути равна тринадцати съ половиной, а ея емкость калорифическая не доходитъ и до половины [2]).

Опыты, произведенные въ различныхъ мѣстахъ земного шара, а также въ одномъ и томъ же мѣстѣ, но въ различныхъ направленіяхъ, показываютъ, что одинъ и тотъ же импульсъ сообщаетъ всегда одному и тому же тѣлу одно и то же движеніе. А между тѣмъ условія, въ которыхъ находится тѣло, всякій разъ различны. Скорость, пріобрѣтенная имъ подъ вліяніемъ вращенія земного шара, уменьшается по мѣрѣ удаленія его отъ экватора; кромѣ того, она соединяется въ высшей степени неодинаково со скоростью, произведенной импульсомъ, смотря по тому направлена ли эта послѣдняя вдоль меридіана или перпендикулярно къ нему. Такъ какъ эти обстоятельства не оказываютъ вліянія на скорость, происходящую вслѣдствіе импульса или на наблюдаемую скорость, то можно, вслѣдствіе этого, сказать, что „динамическая емкость тѣлъ постоянна“, или что она не зависитъ отъ ихъ состоянія покоя или движенія.

---

[1]) Этотъ терминъ я предложилъ въ мемуарѣ, прочитанномъ мною въ Академіи Наукъ, 14 ноября 1887 года.

[2]) Въ этихъ примѣрахъ, точно такъ же какъ и въ предыдущихъ, числа взяты въ круглыхъ цифрахъ.

Калорифическія емкости слѣдуютъ совершенно другому правилу. Калорифическая емкость тѣла не свободна отъ его термическаго состоянія. За исключеніемъ газовъ, считаемыхъ совершенными или очень удаленныхъ отъ точки ихъ сжиженія, калорифическая емкость измѣняется, когда измѣненіе происходитъ въ довольно широкихъ предѣлахъ температуры, и когда приближаются къ перемѣнѣ состоянія тѣлъ, иначе говоря, къ точкѣ ихъ плавленія или кипѣнія. Въ механикѣ же ничто подобное не оправдало бы измѣненія динамической емкости. Въ этомъ случаѣ нѣтъ „перемѣны состоянія". Самыя большія изъ замѣченныхъ скоростей, повидимому, не производятъ никакого измѣненія химическихъ или физическихъ условій тѣла. Тѣла обладаютъ въ этомъ отношеніи свойствами, подобными тѣмъ, какія принадлежатъ совершеннымъ газамъ въ калорифическомъ отношеніи.

Подвижность тѣлъ, при одномъ и томъ же объемѣ, находится въ обратномъ отношеніи къ ихъ динамической емкости. Если подвижность воды принять за единицу, то подвижность какого-нибудь тѣла будетъ выражаться отношеніемъ единицы къ числу, представляющему его динамическую емкость. Полученная, такимъ образомъ, скала представляетъ меньше несходства съ емкостями калорифическими, чѣмъ скала динамическихъ емкостей. Но, все-таки, это сближеніе не болѣе, какъ ариѳметическое.

Непосредственное опредѣленіе массъ, при помощи приборовъ механики въ теоріи очень просто. На практикѣ же оно встрѣчаетъ серьезныя трудности. Особенно если рѣчь идетъ о тѣлахъ, обладающихъ большимъ объемомъ; здѣсь оно становится почти неосуществимымъ.

Строго говоря, для опредѣленія динамической емкости можно пользоваться весьма небольшими объемами, потому что результаты сравненія не зависятъ отъ абсолютнаго объема. Разъ эти емкости опредѣлены, массы разсматриваемыхъ тѣлъ опредѣляются отсюда посредствомъ умноженія цифры емкости на объемъ тѣла. Но этотъ способъ удобенъ лишь для тѣлъ вполнѣ однородныхъ. Малѣйшіе слѣды разнородности уничтожаютъ всякую точность. Поэтому-то въ большинствѣ случаевъ употребленіе приборовъ упомянутаго рода, не даетъ достаточно надежныхъ средствъ.

Къ счастью, природа доставляетъ настолько же быстрый, на сколько и неожиданный способъ обойти препятствіе. Физики открыли, что всѣ тѣла, какого бы рода они ни были, начиная съ самаго нѣжнаго пуха и оканчивая кускомъ

свинца или платины, падаютъ въ пустотѣ одинаково быстро. Если ихъ сразу бросаютъ съ одной и той же высоты, то они падаютъ на землю въ одно и то же время. Слѣдовательно, на эти тѣла, при ихъ паденіи, дѣйствуютъ силы, строго пропорціональныя ихъ соотвѣтственнымъ массамъ; потому что, по опредѣленію, массы пропорціональны силамъ, которыя сообщаютъ имъ одно и то же движеніе въ одно и то же время. Здѣсь же силы, приложенныя къ тѣламъ, происходятъ вслѣдствіе земного притяженія, т. е. представляютъ для каждаго тѣла его собственный вѣсъ. Слѣдовательно, вѣса тѣлъ строго пропорціональны ихъ массамъ, а потому и могутъ служить мѣрой этихъ послѣднихъ. Другими словами, вмѣсто того, чтобы двигать тѣла, для опредѣленія ихъ массы, достаточно ихъ *взвѣшивать.*

Этотъ фактъ, добытый опытомъ, извѣстенъ уже давно. Мы до такой степени освоились съ нимъ, что, въ концѣ концовъ, почти перестали различать массу отъ вѣса. Оба эти свойства намъ кажутся неразрывно связанными одно съ другимъ. А между тѣмъ, если вникнуть поглубже, то окажется, что такого рода совпаденіе представляетъ собою, безъ сомнѣнія, самый необыкновенный и неожиданный изъ всѣхъ фактовъ, которые открываются намъ изученіемъ природы. Какое отношеніе, въ самомъ дѣлѣ, можно вообразить себѣ *a priori* между массой и вѣсомъ? Масса это—большее или меньшее усиліе, требуемое тѣломъ для одного и того же перемѣщенія, а вѣсъ представляетъ собою большее или меньшее притяженіе тѣла земнымъ шаромъ. Какая связь между этими двумя родами фактовъ? Что могло бы препятствовать тому, чтобы тѣло, легко приводимое въ движеніе, было въ то же время и притягиваемо съ большой силой? Не видимъ ли мы подобнаго рода противорѣчія во множествѣ обстоятельствъ? Напримѣръ, не являются ли самыя тяжелыя тѣла вообще легче всѣхъ остальныхъ нагрѣваемыми? А желѣзо, болѣе легкое, чѣмъ платина, развѣ оно не сильнѣе послѣдняго притягивается магнитомъ? Развѣ сцѣпленіе, химическое сродство пропорціональны массамъ разсматриваемыхъ тѣлъ? Не измѣняются ли они въ высшей степени соотвѣтственно природѣ веществъ? До сихъ поръ ни одинъ рядъ явленій не обнаружилъ точнаго согласія съ массами и только съ ними однѣми. Строгая, математическая, исключительная пропорціональность была замѣчена только въ явленіяхъ всемірнаго тяготѣнія.

Законъ тяготѣнія, формулированный Ньютономъ, отно-

сится къ двумъ условіямъ: къ пропорціональности силы массамъ, и къ уменьшенію ихъ въ обратномъ отношеніи къ квадратамъ разстояній. Это послѣднее условіе можно было предвидѣть, потому что силы, лучеиспускаемыя ихъ источникомъ, съ трудомъ распространяли бы свое дѣйствіе инымъ образомъ. Но ничто не наводило на мысль о прямомъ отношеніи силъ къ массамъ. Нужна была привычка, пріобрѣтенная нами вслѣдствіе знакомства съ астрономическими законами и путемъ ежедневнаго употребленія тѣлъ для нашихъ нуждъ, чтобы мы обнаружили такое отношеніе безъ чувства неожиданности и удивленія.

Чѣмъ больше мы думаемъ о дѣйствіи всемірнаго тяготѣнія, тѣмъ меньше понимаемъ пропорціональность его массамъ. Если бы тяготѣніе происходило изъ самой матеріи, было бы, такъ сказать, ея непосредственнымъ лучеиспусканіемъ, то можно бы еще было понять до нѣкоторой степени, что оно пропорціонально массѣ. Но въ такомъ случаѣ, оно должно было бы, повидимому съ теченіемъ времени мало-по-малу ослабѣвать, подобно свѣтовому и тепловому лучеиспусканію, которыя постепенно ослабѣваютъ. Въ тѣлахъ малыхъ размѣровъ оно должно было бы даже исчезнуть совсѣмъ. А между тѣмъ астрономы съ самаго начала исторической эпохи не находятъ никакого уменьшенія въ силѣ тяготѣнія такихъ малыхъ небесныхъ тѣлъ, какъ луна, которой тепловое лучеиспусканіе сдѣлалось почти равнымъ нулю. Если, напротивъ, тяготѣніе зависитъ отъ нѣкотораго дѣйствія, находящагося внѣ тѣлъ и заставляющаго ихъ стремиться одно къ другимъ, подобно жидкости, въ которую они какъ бы погружены, то оно должно было бы быть замѣтнымъ образомъ пропорціонально поверхности тѣлъ, или ихъ объему, въ томъ случаѣ, если мы предположимъ жидкость настолько тонкой, что она можетъ проникнуть внутрь всего тѣла. Но при этомъ предположеніи тяготѣніе не будетъ находиться въ отношеніи къ массѣ. Какъ бы ни смотрѣть на дѣло, а тайна пропорціональности тяготѣнія массѣ остается необъясненной.

Такъ какъ вѣса́ тѣлъ, на поверхности земного шара, пропорціональны ихъ массамъ, тяжесть же измѣняется въ зависимости отъ мѣста на этой поверхности, при чемъ, самыя массы не претерпѣваютъ измѣненія, то отсюда слѣдуетъ, что, смотря по широтѣ, на однѣ и тѣ же массы будутъ дѣйствовать различныя силы. Слѣдовательно, скорости, пріобрѣтенныя въ концѣ одного и того же проме-

жутка времени, при свободномъ паденіи тѣлъ, измѣняются съ широтой. Именно при помощи измѣненія этой скорости физики и опредѣляютъ самымъ точнымъ образомъ измѣненія силы тяжести на поверхности земли. Эти измѣненія могли бы быть опредѣлены также и прямо при помощи взвѣшиванія тѣла на чуствительныхъ пружинныхъ вѣсахъ.

Подобно тому какъ мы сравнивали массы однородныхъ тѣлъ при единицѣ объема и выводили отсюда ихъ динамическую емкость, мы можемъ сравнивать вѣса при единицѣ объема и выводить отсюда ихъ *плотность*. Это слово въ обыкновенной рѣчи вызываетъ представленіе о матеріи болѣе или менѣе сжатой, компактной. Слѣдуетъ остерегаться употребленія подобныхъ образовъ, дающихъ ложное понятіе о вещахъ. Неравенство динамической емкости указываетъ лишь на неравенство въ подвижности, но не позволяетъ дѣлать никакихъ догадокъ относительно абсолютнаго количества матеріи. Неравенство плотности, въ свою очередь, не заключаетъ въ себѣ никакихъ догадокъ относительно неравенства компактности; потому что два тѣла, совершенно но неравныя по плотности, могутъ оказывать одинаковое сопротивленіе сжатію. Неравенство въ плотности указываетъ лишь на неравенство въ притяженіи тѣла землей.

Если взять за единицу плотностей то же тѣло, масса котораго принимается за единицу массы, то цифры, выражающія плотности различныхъ тѣлъ, будутъ тождественны цифрамъ, выражающимъ ихъ динамическую емкость, потому что вѣса пропорціональны массамъ. Если бы, напримѣръ, кубическій дециметръ воды былъ выбранъ, какъ терминъ сравненія, для вѣсовъ и для массъ, то емкости и плотности выражались бы одинаковыми числами. Но нельзя было поступать такимъ образомъ. Масса, которая, подъ дѣйствіемъ силы въ одинъ килограммъ, получаетъ, въ концѣ единицы времени, скорость, равную одному метру, представляетъ собою массу не одного кубическаго дециметра воды, а почти десяти кубическихъ дециметровъ ея. Другими словами, тѣло, свободно падающее въ пустотѣ, пріобрѣтаетъ скорость почти въ десять разъ большую, для того чтобы его масса могла служить единицей, когда его вѣсъ былъ бы принятъ за единицу вѣсу. Этотъ двойной выборъ могъ бы осуществиться лишь въ томъ случаѣ, если бы единица длины была почти въ десять разъ болѣе той, которая принята въ настоящее время. Слѣдовательно, для достиженія цѣли пришлось бы взять за единицу длины не метръ, находя-

щійся въ обращеніи теперь, а скорость, пріобрѣтенную свободно падающимъ тѣломъ въ пустотѣ по прошествіи одной секунды. Такой метръ былъ бы равенъ 9,8088... настоящимъ метрамъ, и новый дециметръ почти его замѣнилъ бы.

Выгоды такой комбинаціи очевидны. Кубическій дециметръ воды далъ бы намъ въ одно и то же время единицу вѣса и единицу массы, между тѣмъ какъ сама матерія его служила бы членомъ сравненія для плотностей и для динамическихъ емкостей. Во всѣхъ формулахъ мы избѣжали бы скучнаго повторенія числа g или 9,8088... Наконецъ, если бы мы когда нибудь захотѣли провѣрять единицу длины, то было бы легче сдѣлать опытъ съ маятникомъ въ Парижѣ, чѣмъ снова измѣрять земной меридіанъ. Но было бы тщетно настаивать на этомъ въ настоящее время: вопросъ рѣшенъ окончательно въ смыслѣ принятія французскаго географическаго метра, который стремится сдѣлаться единицей длины у цивилизованныхъ народовъ.

Вотъ какимъ единицамъ оказано предпочтеніе вмѣстѣ съ метромъ:

Астрономической секундѣ или 86400-ой долѣ звѣздныхъ сутокъ;

Килограмму или вѣсу литра воды, служащаго въ одно и то же время и единицей вѣса, и единицей силы;

И массѣ g кубическихъ дециметровъ воды.

Эта послѣдняя единица выбрана не произвольно и не назначена a priori, подобно другимъ; но она была взята благодаря условію, вытекающему изъ закона природы, въ силу котораго, будучи подвергнута дѣйствію силы въ 1 килограммъ, впродолженіе одной секунды, она пріобрѣтаетъ скорость равную одному метру.

ГЛАВА III.

Задача динамики.

Всякая задача динамики, какъ бы она ни была сложна, по наружному виду, можетъ быть приведена къ слѣдующему простому выраженію.

„Опытъ показалъ, что сила въ 1 килограммъ сообщаетъ массѣ въ g кубическихъ дециметровъ воды по прошествіи одной секунды скорость равную одному метру; спраши-

вается—какую скорость сообщитъ сила въ нѣсколько килограммовъ, дѣйствующая впродолженіе нѣкотораго времени на массу, состоящую изъ нѣсколькихъ кубическихъ дециметровъ воды".

Эта задача можетъ быть выражена сложнѣе, и она усложняется въ самомъ дѣлѣ, вслѣдствіе того, что берется сила перемѣнная какъ по величинѣ, такъ и по направленію, или вслѣдствіе того, что на тѣло дѣйствуютъ разомъ нѣсколько силъ, или же, наконецъ, вслѣдствіе того, что силы дѣйствуютъ на нѣсколько тѣлъ, соединенныхъ между собою различнымъ образомъ. Но, въ сущности, вопросъ отъ этого не мѣняется.

Необходимо прибѣгнуть къ опыту какъ для сведенія сложной задачи къ ея простому выраженію, такъ и для самаго рѣшенія простой задачи. Опытъ одинъ лишь можетъ намъ сообщить: 1) какимъ образомъ единственная постоянная сила дѣйствуетъ на тѣло, когда ея напряженность, масса тѣла и время не равны единицѣ; 2) какимъ образомъ комбинируется дѣйствіе нѣсколькихъ силъ на тѣло или на нѣкоторую систему тѣлъ.

Слѣдовательно, опытъ, кромѣ начальнаго факта, связывающаго между собою различныя единицы, долженъ еще опредѣлить нѣкоторые законы, благодаря которымъ мы могли бы перейти отъ этого начальнаго факта къ простой задачѣ, формулированной выше, а также свести сложную задачу къ простому ея выраженію.

Задача динамики, въ ея общей формѣ, состоитъ, какъ мы видимъ, въ переходѣ отъ познанія силъ и массъ къ познанію движенія. Она получила названіе *прямой* задачи. Но у нея есть *обратная* ей, выражающаяся слѣдующимъ образомъ: „Даны массы и ихъ движенія, требуется опредѣлить силы". Тѣ же законы, выведенные изъ опыта, послужатъ и для рѣшенія этой задачи.

Обратный вопросъ встрѣчается при изученіи явленія во вселенной. Озираясь вокругъ себя, мы замѣчаемъ метерію въ движеніи; мы всего чаще не знаемъ движущихъ ее силъ. Когда Ньютонъ открывалъ законъ всемірнаго тяготѣнія, онъ имѣлъ передъ собою движенія планетъ и ихъ спутниковъ, и изъ этихъ движеній выводилъ силу. Галилей, изучая свободное паденіе тѣлъ, Кавендишъ, желая измѣрить притяженіе земли, имѣли въ виду извѣстнаго рода движенія.

Въ области искусствъ и промышленности намъ приходится обыкновенно рѣшать прямую задачу. Мы имѣемъ въ

своемъ распоряженіи силы, паденіе воды, паръ, электричество и т. д., и вычисляемъ движенія, которыя сможемъ получить, примѣняя ихъ дѣйствіе. Прямая задача принадлежитъ, такъ сказать, практической области, обратная же—области теоретической. Само собой разумѣется, что это правило не безъ исключенія.

Оба вопроса представляютъ въ отношеніи другъ-друга основныя различія, философскую важность которыхъ нельзя не замѣтить.

Прямая задача по самому существу своему *опредѣленна.* Она даетъ только одно рѣшеніе. Если масса тѣла дана точно такъ же, какъ и дѣйствующія на него силы, то движеніе есть необходимое слѣдствіе ихъ. Нельзя представить себѣ, чтобы дѣйствіе, которое слѣдуетъ произвести, оставалось неопредѣленнымъ, и чтобы одна и та же причина при однихъ и тѣхъ же условіяхъ приводила къ различнымъ результатамъ.

Вторая задача, напротивъ, *неопредѣленна.* Она можетъ имѣть множество и даже безконечное число рѣшеній. Прежде всего она въ большинствѣ случаевъ приводитъ не къ опредѣленнымъ реальностямъ, а къ болѣе или менѣе гипотетическимъ причинамъ. Рѣшеніе ея скорѣе *субъективное*, чѣмъ *объективное*. Мы наблюдаемъ движенія, не будучи въ состояніи опредѣлить ихъ истинныя причины. Въ такомъ случаѣ мы воображаемъ себѣ силы, аналогичныя нашимъ личнымъ усиліямъ и способныя произвести тѣ же самыя движенія. Мы считаемъ задачу рѣшенной, когда намъ удается выразить въ числахъ эти фиктивныя силы при помощи сравненія ихъ со знакомой намъ единицей и опредѣлить ихъ направленіе. Что касается тяготѣнія, истинная причина котораго отъ насъ скрыта, то мы его охотно представляемъ себѣ въ видѣ усилія, побуждающаго одни небесныя тѣла двигаться къ другимъ. Нашъ умъ, за отсутствіемъ болѣе полнаго знанія, вполнѣ удовлетворяется, выражая явленіе въ этой простой формѣ, которая, какъ намъ кажется, лучше всего согласуется съ фактами. Таково было чувство современниковъ Ньютона, когда они привѣтствовали его знаменитое открытіе. Хотя этотъ великій человѣкъ и старался предупредить, что онъ не можетъ сказать ничего утвердительнаго насчетъ истинной причины тяготѣнія, никто, однако же, не колебался признать его математическую формулу выраженіемъ самаго изящнаго мірового закона.

Обратная задача, слѣдовательно, имѣетъ цѣлью, обыкно-

венно, не опредѣленіе истинныхъ силъ, а оцѣнку силъ фиктивныхъ или теоретическихъ, которыя могли бы произвести наблюдаемыя движенія. Уже съ этой точки зрѣнія рѣшеніе представляется неопредѣленнымъ, потому что не заключается въ предѣлахъ точной дѣйствительности. Но оно еще болѣе неопредѣленно въ другомъ смыслѣ.

Въ самомъ дѣлѣ, множество системъ различныхъ силъ могутъ соотвѣтствовать вопросу. Конечно, двѣ различныя силы не могутъ, дѣйствуя каждая порознь, производить на тѣло одно и то же вліяніе. Но нѣсколько силъ могутъ комбинировать свое дѣйствіе на тѣло, а тѣмъ болѣе на систему связанныхъ между собою тѣлъ такъ, чтобы произвести дѣйствіе одинаковое съ дѣйствіемъ комбинаціи другихъ силъ, отличныхъ отъ первыхъ. Напримѣръ, нѣсколько силъ, дѣйствующихъ на точку, имѣютъ одну равнодѣйствующую, и эта послѣдняя способна произвести то же самое дѣйствіе какъ и собраніе данныхъ силъ. Вокругъ этой равнодѣйствующей можно представить себѣ сколько угодно системъ составляющихъ, и всѣ эти системы будутъ одинаково способны сообщить тѣлу одно и то же движеніе.

Такимъ образомъ, мы были бы осуждены на постоянную неизвѣстность, если бы область изслѣдованія не ограничивалась, благодаря направленію нашего ума, которое заставляетъ насъ во всевозможныхъ обстоятельствахъ предпочитать самое простое рѣшеніе. Тамъ, гдѣ достаточно одной силы мы не будемъ воображать двухъ; гдѣ достаточно для объясненія двухъ силъ, мы не станемъ разыскивать третью. Поэтому, разсматривая какое-нибудь движеніе, мы всегда начнемъ съ изслѣдованія, не дается ли одна или нѣсколько силъ по самой природѣ вопроса, и имѣетъ ли ихъ существованіе объективное значеніе независимовотъ нашего личнаго способа смотрѣть на вещи? Опредѣли ши этотъ фактъ, мы постараемся открыть простѣйшую систему силъ, которая въ соединеніи съ предположенными силами, была бы достаточна для обезпеченія наблюдаемаго движенія. Такимъ образомъ, когда тѣло движется въ пустотѣ, предполагается наличность нѣкоторой силы, именно тяжести. Когда оно движется въ атмосферѣ, предполагаются данными двѣ силы: тяжесть и сопротивленіе воздуха. Если бы этихъ двухъ силъ съ начальной скоростью оказалось недостаточно для объясненія движенія, то мы были бы должны разыскивать или представлять себѣ третью силу, которая, въ соединеніи съ предъидущими, производила бы дѣйствительное перемѣщеніе.

Вообще, идетъ ли рѣчь объ одномъ тѣлѣ, или объ ихъ совокупности, мы всегда разыскиваемъ самую простую систему силъ, которая, въ соединеніи съ извѣстными намъ заранѣе, оказывается достаточной, чтобы произвести наблюдаемое движеніе. Задача приводится, такимъ образомъ, къ опредѣленію; но это опредѣленіе относительное. Оно можетъ не соотвѣтствовать дѣйствительнымъ фактамъ. Если бы мы не знали, какъ я предполагаю, о существованіи двухъ различныхъ силъ, дѣйствующихъ на тѣло, которое движется въ воздухѣ, то мы были бы принуждены объяснять его движеніе дѣйствіемъ одной силы, выраженіе которой, притомъ довольно сложное, не соотвѣтствовало бы естественнымъ элементамъ явленія. Существуетъ, слѣдовательно—повторю то же слово—значительная доля *субъективности* въ рѣшеніи задачи, заключающемся въ переходѣ отъ движеній къ производящимъ ихъ причинамъ, между тѣмъ какъ этого не встрѣчается въ задачѣ, гдѣ мы переходимъ отъ причинъ къ слѣдствіямъ.

Когда мы разсматриваемъ вопросъ динамики въ его наиболѣе элементарной формѣ, а именно: „опредѣлить скорость, которую сила, постоянная по величинѣ и направленію, сообщаетъ данной массѣ въ концѣ нѣкотораго времени“, мы склонны думать, что этотъ вопросъ можетъ быть рѣшенъ прямо при помощи извѣстнаго отношенія, существующаго между единицами времени, силы, массы и длины, простыми правилами пропорцій. Но это было бы великой ошибкой, объясняемой нашей продолжительной привычкой обращаться съ физическими истинами. Какимъ образомъ, въ самомъ дѣлѣ, нашли бы мы въ математикѣ, т. е. въ насъ самихъ, законы движенія матеріи подъ дѣйствіемъ силъ? Изъ того, что нѣкоторая сила сообщаетъ массѣ въ концѣ даннаго времени извѣстную скорость, можемъ ли мы предвидѣть, что произведетъ двойная сила? или каково будетъ дѣйствіе той же силы на двойную массу? или что произойдетъ подъ вліяніемъ той же силы на ту же массу, но въ двойное время? По какому праву мы стали бы утверждать, что скорость увеличится вдвое въ первомъ и третьемъ случаяхъ, и будетъ равна половинѣ во второмъ? Безъ сомнѣнія, намъ кажется, что оно такъ и должно быть. Но наше убѣжденіе не имѣетъ характера логической необходимости; оно происходитъ исключительно отъ практики, до того древней, что мы уже не можемъ указать, когда она появилась; въ этомъ-то именно и заключается источникъ нашей иллюзіи.

Въ дѣйствительности, механика всецѣло основывается на нѣкоторомъ числѣ первоначальныхъ истинъ, установленныхъ на основаніи непосредственнаго наблюденія природы. Эти истины, или *общіе законы движенія*, одни только и позволяютъ рѣшать задачи динамики, начиная съ самаго простого отношенія между силою и массою и оканчивая величественными законами Астрономіи, а также столь сложными явленіями физики земного шара. Единственная роль вычисленія заключается въ томъ, что оно помогаетъ обнаруживать слѣдствія, которыя скрываютъ въ себѣ эти законы, и такимъ образомъ—строить систематическое сцѣпленіе, въ которомъ первое звено сковано опытомъ.

ГЛАВА IV.

Общіе законы движенія.

Въ настоящее время считаютъ три общихъ закона движенія. Но къ нимъ необходимо прибавить еще четвертый, безъ котораго явленія прикосновенія между тѣлами (треніе, ударъ, деформація и т. д.) получаютъ неправильное, часто даже совершенно ошибочное, объясненіе.

Первый изъ нихъ, называемый *закономъ равенства между дѣйствіемъ и противодѣйствіемъ*, принадлежитъ Ньютону [1]). Онъ утверждаетъ, что въ природѣ дѣйствія всегда попарно равны между собою и противоположны по направленію. Нѣтъ ни одного дѣйствія, большого или малаго, которое не имѣло бы въ точности себѣ равнаго противодѣйствія. Если бы возможно было соединить помощью стержня, обладающаго идеальной способностью сопротивленія, два тѣла, между которыми происходитъ взаимодѣйствіе, то это послѣднее нейтрализовалось бы, и оба тѣла, при отсутствіи всякой другой причины къ ихъ движенію, были бы приведены въ состояніе покоя.

Ньютонъ повѣрилъ этотъ законъ на всѣхъ извѣстныхъ въ его время движеніяхъ небесныхъ тѣлъ. Его послѣдователи, въ своихъ безчисленныхъ приложеніяхъ математики

---

[1]) Я излагаю эти законы не въ хронологическомъ, а въ наиболѣе, повидимому, логическомъ порядкѣ.

къ Астрономіи, никогда не имѣли случая отмѣтить ни малѣйшаго отступленія отъ него. Различныя тѣла нашей системы, начиная съ солнца и оканчивая послѣднимъ астероидомъ, производятъ другъ на друга вліяніе съ одинаковой силою и по противоположнымъ направленіямъ. Недавнія наблюденія, произведенныя надъ движеніями двойныхъ и тройныхъ звѣздъ, приводятъ къ мысли, что тотъ же законъ управляетъ вращеніями и этихъ отдаленныхъ свѣтилъ.

На нашей планетѣ различные факты, всевозможныя явленія постоянно дѣлаютъ очевиднымъ этотъ принципъ. Если бы внутри тѣла дѣйствія, развивающіяся между молекулами, не уравновѣшивались постоянно, то оно не оставалось бы неподвижнымъ на горизонтальной плоскости, и не сохраняло бы вертикальнаго положенія, будучи подвѣшено на концѣ нити, а перемѣстилось бы или наклонилось бы въ направленіи общей равнодѣйствующей внутреннихъ дѣйствій. Магнитъ, привязанный къ куску мягкаго желѣза, или увлекъ бы его за собой или самъ послѣдовалъ бы за нимъ. Жидкость, заключающаяся въ горизонтально поставленномъ сосудѣ, устремилась бы къ одному краю его или даже вылилась бы, если бы не существовало равновѣсія между ея частицами. Химическія реакціи, происходящія вслѣдствіе взаимнаго химическаго сродства, опрокинули бы въ такомъ случаѣ сосудъ, гдѣ онѣ происходятъ. Однимъ словомъ, во всѣхъ явленіяхъ произошли бы глубокія возмущенія, потому что ихъ дѣйствительная форма зависитъ отъ совершенной взаимной противоположности совершающихся въ нихъ дѣйствій.

Эта взаимная противоположность иногда скрывается посредниками, помощью которыхъ передается дѣйствіе. Когда мы хотимъ произвести давленіе на тѣло посредствомъ пружинъ, жидкостей или же предметовъ болѣе или менѣе способныхъ къ измѣненію формы, мы не замѣчаемъ сперва строгаго равенства между усиліями, прилагаемыми въ началѣ давленія и въ концѣ его. Кажется, будто начальное дѣйствіе частью разсѣевается и теряется въ механизмѣ передачи давленія. Но если мы предположимъ, что послѣдній получилъ неизмѣнную форму, что пружины, блоки, ремни, и т. д. при достаточномъ натяженіи образуютъ геометрическую систему, то замѣчаемъ въ этомъ послѣднемъ тѣлѣ, получающемъ извнѣ побужденіе къ движенію, или въ препятствіи, на которое мы давимъ,—противодѣйствіе въ точности равное первоначальному усилію. Въ каждой точкѣ прибора господствуетъ, такимъ образомъ, взаимная проти-

воположность, и правая часть тянетъ или толкаетъ лѣвую, точно такъ же, какъ эта послѣдняя тянетъ или толкаетъ правую.

Легко распознать въ этомъ законѣ знаменитое изреченіе: „Въ природѣ ничто не создается“. Въ томъ, что касается движенія, это изреченіе не представляетъ собой раціональной аксіомы. Оно выражаетъ лишь простую истину, добытую опытомъ, въ достовѣрности которой мы никогда не убѣдились бы безъ изслѣдованій, произведенныхъ физиками. Въ механикѣ есть другія истины, относительно которыхъ точно также произошло недоразумѣніе, такъ какъ источникъ ихъ приписываютъ разуму, вмѣсто внѣшняго міра.

Второй законъ, формулированный Кеплеромъ, носитъ— и при томъ не совсѣмъ правильно—названіе *закона инерціи*. Этотъ терминъ заслуживаетъ объясненія.

Въ сущности, матерія вовсе не инертна. Она находится, это извѣстно всѣмъ, въ постоянной дѣятельности. Подчиненная всеміpному тяготѣнію, поддерживающему всѣ ея части въ тѣсной зависимости, она, сверхъ того, представляетъ собою мѣсто совершенія самыхъ разнообразныхъ явленій. Молекулярныя притяженія, химическое сродство, калорифическія дѣйствія, электрическія и т. д. одушевляютъ ее и господствуютъ надъ ней, не позволяя ей ни на одно мгновеніе оставаться инертной. Когда ее называютъ таковой, то это лишь вслѣдствіе чистой абстракціи: предполагаютъ, что тѣла поставлены въ такія условія, которыя нейтрализуютъ естественныя дѣйствія или дѣлаютъ ихъ мало замѣтными сравнительно съ производными и измѣряемыми на нихъ механическими дѣйствіями. Воображаютъ, напримѣръ, что они катятся по совершенно гладкой горизонтальной поверхности, на которой тяжесть и треніе будутъ едва замѣтны, а притяженіе сосѣднихъ тѣлъ абсолютно ничтожно.

Поэтому не въ смыслѣ бездѣятельности слѣдуетъ понимать слово *инерція*. Истинное значеніе его можно выразить такъ: „Когда тѣло обладаетъ нѣкоторой скоростью, то оно сохраняетъ ее неопредѣленно долго безо всякаго измѣненія, если никакое внѣшнее вліяніе на него не дѣйствуетъ“. Въ этомъ смыслѣ законъ инерціи заслуживалъ бы съ гораздо большимъ правомъ названія *закона сохраненія движенія*.

Очевидно, на основаніи закона Ньютона, что тѣло не можетъ, само по себѣ, увеличить свою дѣйствительную скорость или выйти изъ состоянія покоя, потому что всѣ происходящія въ нихъ дѣйствія взаимно уничтожаются по парно, не создавая

ни какой равнодѣйствующей и, слѣдовательно, они не въ состояніи бываютъ ни ускорить движенія, ни прервать неподвижность. Но вовсе не очевидно, что бы тѣло не могло постепенно замедлять свое движеніе. Почему бы и не терять ему своей скорости влѣдствіе нѣкотораго рода лучеиспусканія, подобно тому какъ оно теряетъ свою теплоту или свой свѣтъ? „Сущность этого страннаго измѣненія, говоритъ Лапласъ, вслѣдствіе котораго тѣло переносится съ одного мѣста на другое, неизвѣстна теперь и таковою всегда останется". Мы не можемъ, слѣдовательно, опредѣлить *a priori* условій сохраненія скорости. Если бы неопредѣленное пространство было наполнено средой, способной производить сопротивленіе, и если бы мы не умѣли *образовать пустоту* въ этой средѣ, какъ это дѣлаемъ съ вѣсомыми газами, то замѣтили бы, что движеніе тѣлъ замедляется болѣе или менѣе скоро, не будучи даже въ состояніи подозрѣвать причины такого измѣненія движенія. Въ этомъ случаѣ законъ инерціи никогда не былъ бы открытъ.

Это предположеніе не заключаетъ въ себѣ ничего необыкновеннаго, такъ какъ въ настоящее время физики и астрономы ставятъ вопросъ—не нарушитъ ли движенія свѣтилъ продолжительное дѣйствіе эфира или какой-либо другой среды, которой покамѣстъ приписываются явленія теплоты, свѣта, электричества. Стоитъ лишь представить себѣ эту среду болѣе плотной, и законъ инерціи перестанетъ быть точнымъ въ предѣлахъ нашихъ наблюденій. Если же мы его считаемъ точнымъ, то единственно лишь вслѣдствіе обстоятельствъ, доказуемыхъ опытомъ. Отсюда понятно, какъ тщетны были дѣлавшіяся въ разное время попытки вывести этотъ законъ путемъ одного только разсужденія. Всѣ онѣ сводятся къ выраженію *неспособности* матеріи измѣнить свое состояніе. Какъ будто, въ каждое мгновеніе, и во множествѣ другихъ отношеній, эта матерія не поражаетъ насъ разнообразіемъ своихъ превращеній!

Тѣ же самыя причины, которыя обезпечиваютъ сохраненіе величины скорости, упрочиваютъ за ней также и направленіе. Если тѣло двигалось по прямой линіи, въ тотъ моментъ, когда внѣшнія силы перестали на него дѣйствовать, оно будетъ продолжать свое движеніе по той же прямой линіи. Если оно двигалось по кривой, то, въ моментъ прекращенія дѣйствія силъ, оно отдалится отъ нея и начнетъ двигаться по касательной и уйдетъ неопредѣленно далеко въ этомъ направленіи.

Я сейчасъ припоминалъ изреченіе: „Ничто не создается". Оно не полно; обыкновенно къ нему прибавляютъ: „Ничто не уничтожается". Если законъ Ньютона соотвѣтствуетъ первой части изреченія, то законъ Кеплера относится ко второй. Оба эти закона, соединенные вмѣстѣ, выражаютъ тотъ важный фактъ, что движеніе не разрушимо или, по крайней мѣрѣ, мы не можемъ указать въ теченіе исторіи уничтоженія движенія. Съ одной стороны, движеніе не можетъ быть увеличено, потому что всякое движущее дѣйствіе сопровождается во вселенной равнымъ и прямо противоположнымъ ему противодѣйствіемъ. Съ другой стороны, оно не можетъ быть уменьшено, такъ какъ законъ инерціи показываетъ намъ, что оно сохраняется въ каждомъ тѣлѣ въ теченіе времени, считаемаго неопредѣленно долгимъ, за исключеніемъ вмѣшательства посторонняго дѣйствія, имѣющаго неизбѣжно соотвѣтствующее ему противодѣйствіе. Впрочемъ, я возвращусь еще къ этому принципу, заслуживающему самаго широкаго разсмотрѣнія.

Геометры употребляютъ часто выраженіе *сила инерціи*. Эти два слова, повидимому, противорѣчатъ одно другому, такъ какъ то, что инертно или бездѣятельно, не могло бы произвести силы. Правильнѣе было бы сказать *сопротивленіе инерціи*. Да и въ этомъ случаѣ еще слѣдуетъ разъяснить смыслъ, даваемый здѣсь слову сопротивленіе. Когда мы толкаемъ впередъ совершенно свободное тѣло, то оно не противопоставляетъ намъ сопротивленія, подобнаго тому, какое оказываетъ тяжесть при подъемѣ; потому что *малѣйшее усиліе* потрясаетъ тѣло, тогда какъ подъемъ тяжести требуетъ усилія, во всякомъ случаѣ превышающаго ея вѣсъ. Сопротивленіе или, скорѣе, противодѣйствіе тѣла, предполагаемаго свободнымъ, соразмѣряется съ нашимъ собственнымъ дѣйствіемъ; но отнюдь не уничтожая его, какъ сдѣлали бы это тяжесть или треніе, или всякое другое препятствіе, оно позволяетъ ему войти цѣликомъ въ тѣло, гдѣ наше дѣйствіе аккумулируется въ формѣ массы, приходящей въ движеніе. То, что мы называемъ силой инерціи или сопротивленіемъ инерціи, есть, слѣдовательно, процессъ, употребляемый природой для передачи движенія одного тѣла другому. Въ этомъ смыслѣ выраженіе „сила инерціи" лучше опредѣляетъ точное выраженіе явленія передачи импульса. Впродолженіе этого явленія тѣло, производящее импульсъ, находится въ томъ же условіи, какъ если бы оно испытывало обратный толчекъ, равный сопротивленію дру-

гого тѣла, получающаго импульсъ. Но во всемъ этомъ нѣтъ ничего противнаго закону инерціи или совершенной подвижности матеріи, какъ могъ бы оказаться склоненъ думать это тотъ, кто принялъ бы указанные метафорическіе термины въ ихъ буквальномъ смыслѣ *).

Третій законъ, открытый Галилеемъ, законъ *независимости движенія*. Его можно выразить въ слѣдующей формѣ: „частныя движенія, сообщенныя различнымъ тѣламъ, однимъ относительно другихъ, не измѣняются, если всѣмъ имъ, сверхъ того, сообщить общее движеніе, при которомъ они въ равныя времена опишутъ равныя и параллельныя прямыя. Наоборотъ, если бы общее движеніе существовало уже раньше, и если бы оно было вдругъ уничтожено, то частныя движенія отъ этого нисколько не измѣнятся. Другими словами, общее движеніе и частныя движенія нисколько не зависятъ другъ отъ друга“.

Опытныя повѣрки этого закона встрѣчаются на каждомъ шагу и приводимые примѣры его сдѣлались классическими. Когда корабль идетъ правильнымъ ходомъ по совершенно спокойному морю, наблюдатель, находящійся на немъ и вслѣдствіе этого принимающій участіе въ общемъ движеніи, замѣчаетъ, что всѣ частныя движенія совершаются такъ, какъ если бы корабль и самъ онъ находились въ покоѣ. Случайныя возмущенія движенія происходятъ вслѣдствіе морского волненія, которое ощущается не одинаково на всѣхъ точкахъ корабля и поэтому нарушаетъ общее движеніе. Въ желѣзнодорожномъ поѣздѣ, если путь совершенно ровенъ и направляется прямолинейно, то путешественники, частное движеніе которыхъ не нарушается движеніемъ общимъ, не чувствуютъ скорости, если только не смотрятъ въ окно на предметы, встрѣчаемые на пути. Кто не замѣтилъ часто повторяющихся иллюзій, которымъ мы способны подвергаться? То намъ кажется, что мы двинулись въ путь, тогда какъ трогается поѣздъ, стоящій рядомъ съ нашимъ; то мы думаемъ, что тронулся этотъ поѣздъ, тогда

*) Въ томъ же смыслѣ говорятъ о „центробѣжной силѣ“. Это отнюдь не значитъ, чтобы тѣло развивало опредѣленную силу для удаленія отъ центра, а просто, что слѣдуетъ прилагать къ нему нѣкоторую силу для приведенія его къ центру. Предоставленное самому себѣ тѣло продолжало бы свое движеніе по касательной въ силу закона инерціи. „Центробѣжная сила“ представляетъ собою, слѣдовательно, противодѣйствіе, вызываемое усиліемъ, которое направлено къ центру.

какъ начали двигаться мы сами. Всякій знаетъ, какія громадныя разстоянія пролетаютъ аэронавты, почти не замѣчая этого. Но ничто такъ не убѣдительно, какъ движеніе земного шара. Предметы, находящіеся въ одномъ и томъ же мѣстѣ, могутъ считаться, какъ бы увлеченными общимъ движеніемъ, по крайней мѣрѣ, впродолженіе нѣкотораго времени. Если бы это общее движеніе производило вліяніе на движенія частныя, то эти послѣднія получили бы различнаго рода измѣненія, смотря по тому, перемѣщались ли бы предметы по направленію меридіана или по направленію параллели—съ востока на западъ, или съ запада на востокъ. Между тѣмъ, указанныя частныя перемѣщенія сохраняютъ всегда одинъ и тотъ же видъ; слѣдовательно, они не зависятъ отъ общаго движенія.

Осуществляемыя въ нашихъ лабораторіяхъ физическія и химическія явленія представляютъ собою примѣръ другого рода. Они никогда не нарушаются при прямолинейномъ перемѣщеніи и безъ потрясенія той подставки, на которой производится опытъ. Можно, однако, считать дѣйствія, о которыхъ идетъ рѣчь, въ различной степени функціями взаимныхъ разстояній между молекулами и скоростей однѣхъ изъ нихъ по отношенію къ другимъ. Если бы общее движеніе измѣняло движенія частныя, то частныя дѣйствія отъ этого пострадали бы, и опытъ былъ бы болѣе или менѣе неудаченъ.

Такъ какъ вниманіе было уже сыздавна обращено на этотъ великій законъ, то въ настоящее время онъ сдѣлался почти раціональной истиной, и таковой его неявно считаютъ, когда предполагаютъ очевиднымъ, что сила, дѣйствующая вдвое большее время, сообщитъ и вдвое большую скорость. Между тѣмъ, люди далеко не всегда такъ думали, потому что въ то время, когда Галилей изложилъ свое открытіе, „со всѣхъ сторонъ, говоритъ Огюстъ Контъ, посыпалась масса апріористическихъ возраженій, стремившихся доказать раціональную невозможность такого предложенія; и оно получило всеобщее признаніе лишь послѣ того, какъ логическая точка зрѣнія уступила мѣсто точкѣ зрѣнія физической“ *).

Этотъ законъ служитъ основаніемъ всѣхъ теоремъ, относящихся къ комбинаціи движеній или производящихъ ихъ силъ. Предположимъ два тѣла, обладающія общимъ

*) Cours de Philosophie positive, 2-e édition, tome 1, page 386.

движеніемъ, и одно изъ нихъ совершаетъ относительно другого движеніе частное, состоящее въ томъ, что оно, въ нѣкоторое время, описываетъ отрѣзокъ прямой, болѣе или менѣе наклоненный къ той, которая представляетъ собою общее движеніе. Въ нѣкоторый данный моментъ оба тѣла, въ силу ихъ общаго движенія, пройдутъ отрѣзки равные и параллельные; то же, которое обладаетъ сверхъ того еще и частнымъ движеніемъ, пройдетъ отрѣзокъ прямой, представляющій это послѣднее. Это частное движеніе, наблюдаемое съ другого тѣла, будетъ казаться такимъ, какъ будто общаго движенія совсѣмъ и не существовало. Общее перемѣщеніе перваго тѣла въ пространствѣ будетъ, слѣдовательно, изображаться послѣдовательнымъ прохожденіемъ его по двумъ прямымъ, одна изъ которыхъ представляетъ собою общее движеніе, а другая движеніе частное, или прохожденіемъ вдоль линіи, замыкающей треугольникъ и соединяющей точку начала движенія съ точкой его конца. Еслибы тѣло обладало еще третьимъ движеніемъ, то его абсолютное перемѣщеніе изображалось бы линіей, замыкающей многоугольный контуръ, построенный на трехъ прямыхъ; и такъ дальше, сколько бы ни было различныхъ движеній тѣла, происходящихъ одновременно.

Наоборотъ, дѣйствительное движеніе тѣла можно разсматривать, какъ результатъ комбинаціи нѣкотораго числа частныхъ движеній. При томъ же эти послѣднія совершенно произвольны; достаточно только, чтобы конецъ многоугольнаго контура, построеннаго изъ прямыхъ, представляющихъ эти движенія, совпадалъ съ дѣйствительной точкой завершенія представляемаго ими общаго движенія. Такимъ образомъ подтверждается наше право, которое мы уже признали за собою, приписывать движеніе тѣла безчисленному множеству различныхъ системъ частныхъ движеній или безчисленному множеству системъ различныхъ силъ. Между тѣмъ какъ очевидно, что если система дана, то возможна лишь одна равнодѣйствующая, а именно, та, которая изображается прямой, проведенной отъ точки отправленія къ концу многоугольнаго контура, построеннаго изъ элементовъ этой системы.

Задавались, въ видахъ теоретическаго упрощенія, вопросомъ,—не могутъ ли три предыдущіе закона быть сведены къ меньшему числу ихъ, вслѣдствіе открытія какого-нибудь еще болѣе общаго закона, который заключалъ бы въ себѣ по крайней мѣрѣ два изъ нихъ. Усилія, сдѣланныя въ

этомъ направленіи, не привели ни къ чему, и я сомнѣваюсь, чтобы они когда нибудь увѣнчались успѣхомъ. Въ самомъ дѣлѣ, когда мысленно исключаютъ одинъ изъ этихъ законовъ, то два другіе не терпятъ никакого измѣненія отъ этого и продолжаютъ существовать всецѣло: очевидное доказательство ихъ взаимной независимости. Поэтому законъ, который имѣлъ бы видъ болѣе общаго, представлялъ бы собою лишь чисто внѣшнее соединеніе двухъ различныхъ законовъ, а ихъ сліяніе въ высшій принципъ было бы просто словесной уловкой.

Единственная часть, дѣйствительно общая между первымъ и вторымъ закономъ, это—та, которая выражаетъ невозможность для тѣла увеличить свою собственную скорость, въ силу ли закона инерціи, или по причинѣ равенства дѣйствія противодѣйствію. Легко найти формулу, гдѣ не встрѣчалось бы такого повторенія. Но такъ какъ законъ инерціи не заключался бы въ ней всецѣло, то она все таки представляла бы собою два отдѣльныхъ закона. Полученное такимъ образомъ логическое улучшеніе было бы не только уменьшено, а даже уничтожено, неудобствомъ выраженія неполнаго закона, выраженія, лишеннаго единства и даже ясности. Усилія геометровъ должны быть направлены, скорѣе, къ открытію новыхъ законовъ, безъ сомнѣнія менѣе обширныхъ, но способныхъ дать ключъ къ тѣмъ частнымъ случаямъ, связать которые съ тремя предыдущими законами анализу до сихъ поръ плохо удается. Поэтому весьма важно признать четвертый общій законъ, относящійся преимущественно къ физикѣ, но котораго присутствіе въ динамикѣ неизбѣжно для объясненія многихъ родовъ явленій.

Этотъ четвертый законъ, принадлежащій Майеру и Джоулю, открытъ не болѣе полстолѣтія тому назадъ. Онъ извѣстенъ подъ именемъ *закона механическаго эквивалента теплоты* и обозначаетъ, что между механическимъ и калорифическимъ дѣйствіями существуетъ естественное постоянное и опредѣленное отношеніе. Предпринятые двумя вышеназванными знаменитыми физиками и ихъ послѣдователями многочисленные опыты поставили этотъ великій принципъ внѣ всякихъ возраженій.

Для того чтобы поднять кубическій дециметръ воды на высоту 425 метровъ необходимо—судя по среднему числу, выведенному изъ наблюденій—столько же теплоты, сколько потребуется ея для повышенія температуры этого деци-

метра воды на одинъ градусъ. Другими словами, если горѣніе угля употребляется, съ одной стороны, на непосредственное нагрѣваніе воды, а съ другой—на приведеніе въ движеніе подъемной машины, то потребленіе угля для повышенія температуры одного литра воды на одинъ градусъ въ первомъ случаѣ и потребленіе его для поднятія на 425 метровъ вѣса въ 1 килограммъ во второмъ будутъ тождественны въ сбоихъ аппаратахъ. Наоборотъ, движеніе пріобрѣтенное однимъ килограммомъ, падающимъ съ высоты 425 метровъ, эквивалентно тому же самому количеству теплоты, обозначаемому въ физикѣ словомъ *калорія*. Въ этомъ, именно, отношеніи механическія и теплотныя явленія постоянно замѣщаютъ другъ друга въ природѣ.

Благодаря этому новому принципу, отнынѣ становится легко истолковывать множество фактовъ, которые, повидимому, представляли собою настоящія аномаліи и которыми обыкновенно пренебрегали при изложеніи вопросовъ динамики. Когда, напримѣръ, два тѣла ударяются одно о другое, они теряютъ при своемъ ударѣ, если только они не совершенно упруги, часть своего движенія. Эта потеря могла быть до нѣкоторой степени объясняема молекулярными силами, которыя приходится преодолѣть для окончательнаго измѣненія формы тѣла. Но въ большинствѣ случаевъ она бывала не вполнѣ пропорціональна внутренней работѣ. Слѣдовательно, происходило какъ бы уничтоженіе силы безъ извѣстной причины, и это уничтоженіе, не долго думая, согласились относить, такъ сказать на счетъ прибылей и убытковъ, не погружаясь въ болѣе глубокія изслѣдованія вопроса. Отсюда и возникли слишкомъ поверхностныя теоріи, сохранявшіяся долгое время въ нѣкоторыхъ руководствахъ и оставившія тамъ слѣды даже до сихъ поръ. Онѣ удовлетворились установленіемъ алгебраическаго отношенія между уничтожившейся частью движенія и происшедшими измѣненіями скоростей. Но законъ Майера и Джоуля исправилъ эту точку зрѣнія. Здѣсь нѣтъ простого уничтоженія движенія; принципъ сохраненія его не затронутъ: тамъ, гдѣ исчезаетъ движеніе—появляется теплота. Обѣ части явленія вознаграждаются одно другимъ.

Всѣ частности теоріи удара объясняются превосходно. Съ одной стороны, было извѣстно, что тѣла совершенно упругія не теряютъ движенія. Они обмѣниваются имъ, но въ цѣломъ оно остается неизмѣннымъ. При этомъ тѣла совершенно упругія не нагрѣваются въ противоположность

остальнымъ тѣламъ. Точно такъ же очень твердыя тѣла, почти не способныя измѣнять форму, близкія къ тому абстрактному состоянію, которое называется авторами математическихъ сочиненій геометрически твердымъ тѣломъ, не утрачиваютъ замѣтнаго движенія. И опять-таки, въ противоположность тѣламъ конкретнымъ, они тоже не нагрѣваются. Но, съ другой стороны, было извѣстно, что тѣла способныя сдавливаться, не представляя никакихъ условій для замѣтной внутренней работы, какъ свинецъ, могутъ утратить все свое движеніе. Что же происходитъ съ такими тѣлами? Прежняя динамика не отвѣчала ничего на этотъ вопросъ. Но въ настоящее время мы признаемъ, что тѣла при этомъ нагрѣваются, и что повышеніе ихъ температуры въ точности соотвѣтствуетъ исчезнувшему движенію. Поэтому теперь намъ уже нечего себя спрашивать—почему одни тѣла теряютъ силу, а другія, напротивъ, сохраняютъ ее? Что происходитъ съ кажущимся уменьшеніемъ, совершающимся въ великомъ цѣломъ? Очень просто—вотъ что: потери не бываетъ ни въ томъ, ни въ другомъ случаѣ; происходитъ равнозначащая замѣна, помощью которой первоначальная сумма силъ сохраняется всегда.

То же самое можно сказать и по поводу всѣхъ явленій, гдѣ подъ вліяніемъ прикосновенія происходитъ уменьшеніе скорости. Изъ нихъ треніе должно занимать первое мѣсто. Оно то именно и натолкнуло ученыхъ на мысль о механическомъ эквивалентѣ теплоты. Графъ Румфордъ благодаря своимъ знаменитымъ опытамъ въ Мюнхенѣ явился предшественникомъ Майера и Джоуля.

Наоборотъ, реакціи, совершающіяся вслѣдствіе прикосновенія и производящія движеніе, сопровождаются пониженіемъ температуры. Взрывъ химическаго соединенія вызываетъ мгновенно образованіе газовъ при очень высокой температурѣ. Эти газы, расширяясь, выбрасываютъ находящіяся передъ ними тѣла. Но въ то же время они охлаждаются, и охлаждаются пропорціонально скорости происшедшаго движенія. Здѣсь точно такъ же нѣтъ созданія чего-либо новаго, какъ въ предыдущихъ случаяхъ не было уничтоженія. Динамическій элементъ образуется здѣсь на счетъ теплоты, отнятой у газовъ при разряженіи. Теплота же явилась результатомъ нѣкотораго химическаго соединенія, въ составъ котораго вошла сила.

Законъ Майера и Джоуля служитъ настоящимъ соединительнымъ звеномъ между механикой и физикой. Не

смотря на его происхожденіе, онъ занимаетъ видное мѣсто въ первой изъ этихъ наукъ, не только потому, что объясняетъ ея явленія, но и вслѣдствіе того, что имѣетъ сходство, по своему характеру, съ тремя первыми законами; подобно этимъ послѣднимъ онъ не зависитъ отъ природы тѣлъ. Равенство между дѣйствіемъ и противодѣйствіемъ, неопредѣленно долгое сохраненіе скорости, независимость частныхъ движеній отъ общаго сохраняются относительно всѣхъ видовъ матеріи; они одинаково справедливы какъ для одного, такъ и для другого тѣла. Точно также справедлива для всѣхъ тѣлъ и эквивалентность между динамическимъ и калорифическимъ дѣйствіями. Будетъ ли употребляться термическій приборъ для поднятія тяжести или для нагрѣванія воды, отношеніе, наблюдаемое между двумя рядами дѣйствій, ни въ чемъ не измѣнится съ перемѣной природы матеріаловъ, входящихъ въ составъ этого прибора. Двѣ равныя массы, обладающія одной и той же скоростью, представляютъ одно и то же количество теплоты, изъ какого бы вещества онѣ ни состояли. Килограммъ мрамора и килограммъ желѣза, падающіе съ высоты 425 метровъ, доставляютъ и тотъ, и другой одну калорію. Термодинамическое отношеніе, слѣдовательно, однородно съ тремя общими законами движенія и во всѣхъ случаяхъ оправдываетъ свое мѣсто рядомъ съ ними.

Я часто настаивалъ на необходимости не отдѣлять зданія механики отъ ея опытныхъ основаній. Предположить, что первое можетъ быть замѣнено средствами анализа или метафизическими соображеніями, значило бы обречь себя заранѣе на несовершенныя доказательства. Поучительный примѣръ этого можно видѣть въ усиліяхъ знаменитыхъ геометровъ вывести непосредственно или параллелограммъ силъ, или пропорціональность между скоростью силы и временемъ ея дѣйствія. Столь справедливо знаменитая книга Пуэнсо о статикѣ показываетъ очень хорошо, что даже самые великіе умы неспособны доказать, однимъ только умозрительнымъ путемъ, эквивалентность между дѣйствіемъ одной силы и соединеннымъ дѣйствіемъ двухъ различныхъ силъ. Потому что кромѣ опыта, чѣмъ другимъ можно доказать, что одна сила въ состояніи воспрепятствовать или замѣнить собою движеніе, произведенное дѣйствіемъ двухъ силъ на матеріальную точку? Не значитъ ли это—допускать заранѣе то, что составляетъ содержаніе вопроса, а именно—возможность найти ихъ равнодѣйствую-

шую? И точно также, что докажетъ, кромѣ опыта, что послѣдовательныя скорости складываются? Здѣсь мы вносимъ въ область физики истины изъ области умозрѣнія. Изъ того, что длины, поверхности, массы складываются, мы заключаемъ о возможности сложенія скоростей, не зная, имѣютъ ли онѣ въ природѣ то же значеніе, какимъ въ ариѳметической суммѣ обладаютъ единицы. Слѣдуетъ избѣгать такого смѣшенія и проводить строгую границу между идеями, происходящими отъ пространства, времени или изъ чисто логическихъ умозрѣній и другими, выведенными изъ матеріи и реальностей внѣшняго міра.

ГЛАВА V.

Количество движенія.—Живая сила.—Энергія.

Явленія развиваются во времени. Мы склонны думать, что дѣйствія силы накопляются за время ея дѣйствованія, и что окончательный результатъ ихъ представляетъ собою числовую сумму. Если, слѣдовательно, напряженіе силы постоянно, то произведенный ею результатъ намъ кажется въ каждое мгновеніе пропорціональнымъ времени ея дѣйствованія.

Но въ природѣ дѣло происходитъ далеко не всегда такимъ образомъ. Во многихъ случаяхъ хотя сила и постоянна, но наблюдаемое дѣйствіе ея не увеличивается пропорціонально времени, а наоборотъ, его прогрессивное движеніи постепенно замедляется и, въ концѣ концовъ, даже останавливается совершенно, какъ будто достигнутый уже результатъ служитъ препятствіемъ для новаго прогресса. Когда подвергаютъ тѣло дѣйствію постояннаго источника теплоты, то оно накопляетъ теплоту не въ прямомъ отношеніи ко времени; нагрѣваніе его все болѣе и болѣе замедляется по мѣрѣ продолжительности дѣйствія теплоты. Заряженіе электрической баттареи не можетъ возрастать неопредѣленно долгое время, несмотря на постоянное образованіе электричества въ источникѣ. Кристалъ, образующійся въ насыщенномъ растворѣ, не увеличивается постоянно, даже въ томъ случаѣ, если растворъ поддерживается все время на желательной степени насыщенія. Само собой разумѣется, что эти факты объясняются побочными причи-

нами, тормозящими дѣйствіе силы. Но при анализѣ явленія нельзя никогда быть увѣреннымъ, что знаешь все, и, слѣдовательно, нѣтъ возможности утверждать заранѣе, что если бы эти, такъ называемыя, побочныя причины были устранены, то оправдалась бы точная пропорціональность результата ко времени. Скорѣе существуетъ, повидимому, предѣлъ, который по той или другой причинѣ преграждаетъ путь природѣ.

Между тѣмъ, образованіе скорости составляетъ исключеніе. Накопленіе дѣйствій происходитъ здѣсь неопредѣленно долго, и скорость, сообщенная тѣлу постоянной силой, увеличивается всегда пропорціонально времени ея дѣйствованія. Это простое слѣдствіе изъ закона Галилея. Такъ какъ движенія не зависятъ одни отъ другихъ, то скорость, сообщенная тѣлу въ единицу времени, въ теченіе какой-нибудь фазы его, будетъ та же самая, какъ въ томъ случаѣ, когда тѣло находится въ покоѣ. Она прибавляется къ скорости уже пріобрѣтенной въ предыдущія единицы времени, потому что направленіе ея не мѣняется. Слѣдовательно, въ концѣ какого-нибудь періода, общая скорость будетъ равна скорости, полученной въ единицу времени, помноженной на число единицъ, заключающихся въ этомъ періодѣ. Поэтому-то и говорятъ, что дѣйствіе постоянной силы въ теченіе нѣкотораго времени или ея *количество дѣйствія* выражается произведеніемъ силы на время ея дѣйствованія.

Съ другой стороны, полученное дѣйствіе или пріобрѣтенная тѣломъ скорость находится въ обратномъ отношеніи къ массѣ; потому что—по опредѣленію—массы пропорціональны силамъ, которыя сообщаютъ имъ одну и ту же скорость. Вслѣдствіе этого, если масса вдвое больше, то и сила должна быть увеличена вдвое для того, чтобы сообщить ей ту же самую скорость; а если бы эта сила осталась та же самая, то сообщенная ей скорость была бы вдвое меньше. Скорость, пріобрѣтенная тѣломъ, слѣдовательно, въ одно и то же время пропорціональна количеству дѣйствія силы, вліяющей на тѣло, и обратно пропорціональна его массѣ. Или, другими словами,—количество дѣйствія пропорціонально произведенію массы на пріобрѣтенную скорость. Это произведеніе получило названіе *количества движенія*. Такимъ образомъ, существуетъ пропорціональность между количествомъ дѣйствія или причиной и количествомъ движенія или ея ощутимымъ слѣдствіемъ. На это нужно обратить вниманіе, потому что вообще въ физическихъ явленіяхъ наблю-

даемое дѣйствіе слабѣе дѣйствительнаго, замаскированнаго или отчасти уничтоженнаго другими причинами.

Вмѣсто того чтобы быть пропорціональными, оба произведенія становятся равными по численному значенію, если соотвѣтственнымъ образомъ будутъ выбраны единицы. Единица массы должна быть такова, чтобы подъ дѣйствіемъ единицы силы она могла пріобрѣсти въ единицу времени скорость, равную единицѣ длины. А мы видѣли раньше, что на этомъ именно и остановились. Избранная единица массы равна g кубическимъ дециметрамъ воды, и эта масса подъ вліяніемъ силы въ 1 килограммъ пріобрѣтаетъ скорость равную 1 метру въ секунду. Та же цѣль могла бы быть достигнута при совершенно другой системѣ единицъ, удовлетворяющей тому же самому экспериментальному отношенію.

Если бы движущая сила измѣнялась въ напряженіи во время своего дѣйствованія, то пришлось бы взять ея среднюю величину; равенство между количествомъ дѣйствія и количествомъ движенія существовало бы тогда для этой средней величины. Если бы измѣнялось также и направленіе ея, то сила и скорость должны были бы постоянно опредѣляться по отношенію къ направленію движенія, и равенство содержало бы составляющія, направленныя по касательной, и соотвѣтствующую ей скорость. Но эти различія, важныя въ дидактическомъ отношеніи, не имѣютъ значенія съ философской точки зрѣнія. Я буду предполагать съ этого времени, что сила постоянна по величинѣ и по направленію.

Движущаяся масса точно представляетъ совокупность дѣйствій, произведенныхъ силой. Такъ какъ, вслѣдствіе закона инерціи, масса сохраняетъ неопредѣленно долго свою скорость, то она представляетъ, слѣдовательно, эту совокупность въ извѣстный моментъ времени. Она даже способна возобновить дѣйствія силы, или же произвести новыя дѣйствія, подобныя тѣмъ, которыя она получила. Если противопоставить тѣлу сопротивленіе, равное и противоположное первоначальной силѣ, то оно придетъ въ состояніе покоя въ то же время, которое было употреблено указанной силой для сообщенія ему этого движенія. Это заключеніе—весьма замѣчательно, такъ какъ дѣйствіе не въ состояніи бываетъ обыкновенно воспроизвести его причину, давшую ему начало.

Сверхъ того, масса, находясь въ движеніи, способна произвести такое дѣйствіе, котораго не могла бы оказать

даже сама движущая сила. Такъ, она можетъ преодолѣть, правда, въ очень короткій промежутокъ времени, силу, гораздо большую той, которая произвела движеніе этой массы. Благодаря такому свойству она, скорѣе, приближается къ тѣлу, заряженному электричествомъ, чѣмъ къ нагрѣтому тѣлу, съ которымъ у нея, впрочемъ, такъ много другихъ аналогій.

Тѣла представляютъ собою настоящіе аккумуляторы движущей силы подобно тому, какъ они являются аккумуляторами электричества и теплоты. Способность къ поглощенію или къ сохраненію этихъ послѣднихъ зависитъ отъ природы тѣла, отъ вида образующей его матеріи и отъ другихъ физическихъ и химическихъ условій различнаго рода. Аккумулированіе же движущаго дѣйствія зависитъ исключительно отъ плотности или отъ массы единицы объема. Электричество и теплота, разъ аккумулированныя тѣломъ, сохраняются, если ихъ окружить нѣкоторыми соотвѣтствующими предосторожностями. Движущее дѣйствіе сохраняется точно также цѣною аналогичныхъ предосторожностей. Приведенное въ движеніе тѣло должно быть поставлено съ этого момента внѣ условій потери имъ скорости: тренія, удара, сопротивленія среды и т. д. Однимъ словомъ, тѣло должно находиться въ состояніи совершеннаго изолированія. Здѣсь, слѣдовательно, нѣтъ существенной разницы съ условіями, обезпечивающими сохраненіе другихъ видовъ энергіи въ природѣ.

Два количества движенія одного и того же направленія складываются; два количества движенія противоположныхъ направленій вычитаются одно изъ другого. Слѣдовательно, два количества движенія, равныя и противоположныя по направленію, въ суммѣ даютъ нуль. Эта ариѳметическая операція не должна вводить насъ въ заблужденіе, заставляя предполагать, будто два равныхъ и противоположныхъ количества движенія могутъ быть эквивалентны отсутствію движенія. Это значило бы смѣшивать алгебраическій результатъ съ результатомъ физическимъ. Въ формулахъ равные члены съ противоположными знаками могутъ быть уничтожены всякій разъ, когда рѣшеніе задачи динамики зависитъ исключительно отъ *численнаго значенія* общаго количества движенія и когда подобная компенсація равныхъ и взаимно-противоположныхъ дѣйствій не оказываетъ вліянія на общій результатъ. Напримѣръ, среднее движеніе нѣсколькихъ тѣлъ или скорость центра тя-

жести въ какомъ-нибудь направленіи выражается аналитически суммой количествъ движенія этихъ тѣлъ (проектированныхъ на направленіе пути), раздѣленной на сумму ихъ массъ. Если въ подобной системѣ два тѣла, которымъ сообщены равныя и противоположныя количества движенія, будутъ приведены въ состояніе относительнаго покоя, то общая сумма количествъ движенія не измѣнится и движеніе центра тяжести останется то же самое. Поэтому, вполнѣ законно считать оба эти количества, какъ бы взаимно уничтожающимися, и такими, которыя могутъ быть зачеркнуты. Они и въ самомъ дѣлѣ уничтожаются по отношенію къ движенію центра тяжести, а также по отношенію ко всякому другому элементу, величина котораго зависѣла бы только отъ этого численнаго значенія.

Но они далеко не уничтожаются въ смыслѣ физическомъ. Потому что если бы два тѣла, движущіяся, такимъ образомъ, по противоположнымъ направленіямъ, столкнулись, то произошло бы иногда въ высшей степени разрушительное явленіе, ударъ, который, кромѣ того, смотря по степени упругости тѣлъ, оставилъ бы послѣ себя нѣкоторое движеніе и количество теплоты, пропорціональное исчезнувшему движенію (я не принимаю въ расчетъ внутренней работы). Слѣдовательно, лежитъ пропасть между математической компенсаціей и физической нейтрализаціей. Первая представляетъ собою абстрактное дѣйствіе, вторая—дѣйствительное явленіе. По одному нельзя заключать о другомъ. Количества движенія имѣютъ одну и ту же конкретную величину, каково бы ни было ихъ направленіе и ихъ алгебраическій знакъ.

Силы природы ограничены въ своихъ проявленіяхъ. Перемѣщая тѣла, онѣ стремятся къ концу своего дѣйствія. Тяготѣніе, заставляющее тѣло падать съ нѣкоторой высоты, безсильно производить это дѣйствіе, послѣ того какъ тѣло достигнетъ земли. Сила притяженія солнцемъ планетъ прекратилась бы, если бы эти послѣднія, лишенныя своей начальной скорости, могли свободно упасть на него. Пружина перестаетъ дѣйствовать, послѣ того какъ была спущена. Паръ, толкающій поршень машины, теряетъ свою способность производить работу, по мѣрѣ своего расширенія. Животное истощаетъ свои силы при переноскѣ груза или просто даже—совершая длинный переходъ.

Это общее условіе сообщаетъ большой интересъ изслѣдованію произведенія силы на разстояніе, пробѣгаемое

точкой ея приложенія. Такое произведеніе измѣряетъ въ каждый моментъ дѣйствіе, уже потраченное, и даетъ возможность опредѣлить то, которымъ можно еще располагать. Дѣйствія, наблюдаемыя въ человѣческой промышленности, внушаютъ тотъ же самый взглядъ. Они состоятъ чаще всего въ преодолѣваніи сопротивленія при движеніи тѣла вдоль извѣстнаго направленія. При тягѣ желѣзнодорожнаго поѣзда, вспахиваніи поля, обстругиваніи дерева, сверленіи металловъ, во всѣхъ этихъ случаяхъ приходится уничтожать сопротивленіе, простирающееся на извѣстную длину. Вотъ въ чемъ состоитъ промышленная работа въ томъ видѣ, какъ мы ее понимаемъ и производимъ. Такимъ-то образомъ геометры и были приведены къ тому, чтобы дать произведенію силы на путь, пройденный точкой ея приложенія, названіе *работы*. Они изслѣдовали отношеніе, существующее между этой работой и скоростью движущагося тѣла, когда послѣднее, выходя изъ состоянія покоя, свободно уступило дѣйствію силы.

Это отношеніе выводится легко изъ намъ уже извѣстнаго отношенія между количествомъ дѣйствія или „произведеніемъ силы на время“ и количествомъ движенія или „произведеніемъ массы на скорость“. Въ самомъ дѣлѣ употребленное время находится въ обратномъ отношеніи къ средней скорости и въ прямомъ отношеніи къ пройденному пути *). Средняя скорость равна половинѣ пріобрѣтенной или конечной скорости, потому что подъ вліяніемъ постоянной силы скорость растетъ равномѣрно съ временемъ. Произведеніе силы на время или количество дѣйствія, слѣдовательно, равняется произведенію силы на пройденный путь, раздѣленному на половину пріобрѣтенной скорости. Кромѣ того, мы видѣли, что это количество пропорціонально количеству движенія и, при соотвѣтствующемъ выборѣ единицъ, можетъ быть ему равно. Такимъ образомъ, сила, умноженная на пройденный путь, или работа, будучи раздѣлена на половину пріобрѣтенной скорости, равна произведенію массы на эту скорость, а потому: *работа равняется половинѣ произведенія массы на квадратъ скоро-*

*) Если предположить, что дѣйствительная скорость, перемѣнная во все продолженіе пути, замѣнена скоростью постоянной, равной среднему значенію первой, то пройденное пространство будетъ выражаться произведеніемъ этой средней скорости на время; откуда слѣдуетъ, что послѣднее равно пройденному пространству, раздѣленному на время.

сти. Это послѣднее количество получило названіе *живой силы.* Послѣднее выраженіе, несмотря на несоотвѣтствіе даннаго ему названія *), удержалось въ наукѣ до сихъ поръ, а самое отношеніе получило названіе уравненія или отношенія живой силы. Оно выражаетъ равенство между употребленной работой и полученной живой силой.

Съ конкретной точки зрѣнія, живая сила представляетъ собою ни болѣе ни менѣе, какъ количество движенія; это есть накопленіе дѣйствій движущей силы. Съ точки же зрѣнія абстрактной или аналитической, живая сила имѣетъ иное значеніе, потому что представляетъ произведеніе движущей силы на другое число единицъ.

Здѣсь мы находимся у источника противорѣчія, обнаружившагося нѣкогда въ механикѣ, когда стали изслѣдовать явленіе удара съ двоякой точки зрѣнія: съ точки зрѣнія количества движенія и съ точки зрѣнія живой силы. Если два одинаковые шара, обладающіе равными, но противоположными по направленію скоростями, сталкиваются между собою на прямой линіи, соединяющей ихъ центры, то что при этомъ происходитъ? Въ томъ случаѣ, когда шары будутъ совершенно упруги, они оттолкнутся одинъ отъ другого и при этомъ, повидимому, обмѣняются своими скоростями. Общее количество движенія было равно нулю передъ ударомъ, таковымъ же останется и послѣ него. Живая же сила сохранила свое первоначальное значеніе, потому что скорости остались точно тѣми же. Если бы шары сплющивались подобно свинцовымъ, то они, послѣ удара, остались бы одинъ подлѣ другого безъ движенія Общее количество движенія было бы равно нулю, какъ и въ первомъ случаѣ. Но живая сила, вмѣсто того, чтобы сохраниться, уничтожилась бы, въ свою очередь, потому что оба шара находились бы теперь въ состояніи покоя. Такимъ образомъ, находящаяся въ обоихъ

*) Это выраженіе, безспорно, очень неправильно. Слово *сила* измѣнило здѣсь свой естественный смыслъ и приняло тотъ, который обыкновенно приписывается работоспособности машинъ, когда для того, чтобы указать на ихъ способность призвести большую работу, говорятъ, что онѣ обладаютъ большой силой. Слово *живая* (*vive*) заимствовано изъ старо-французскаго языка и служитъ синонимомъ движенія; по-французски говорятъ „живая вода" (eau vive) о водѣ проточной, слѣдовательно, „живая сила" обозначаетъ, собственно говоря, „работу въ движеніи". Нѣкоторые геометры, именно, Белланже, чтобы избѣжать неудобства этого выраженія, предложили терминъ *живая способность* (*puissance vive*) который, однако же, не привился.

тѣлахъ динамическая способность, обнаруживающаяся въ томъ и другомъ случаѣ одинаково, когда ее разсматривали въ состоянiи количества движенiя, обнаруживается иначе, если ее разсматривать въ состоянiи живой силы. Равная всегда нулю въ первомъ случаѣ, она была бы то нулемъ, то положительной величиной во второмъ. Какъ будто нашъ субъективный способъ оцѣнки вещей могъ имѣть влiянiе на ихъ реальность! Новая термодинамика примирила эти противорѣчiя. *Ничто никогда не теряется.* Въ одномъ случаѣ движенiе сохраняетъ свою начальную форму; въ другомъ оно принимаетъ форму тепловую.

Отношенiе живой силы имѣетъ то большое преимущество передъ отношенiемъ количества движенiя, что позволяетъ дѣлать гораздо скорѣе и легче учетъ дѣйствiй, ожидаемыхъ отъ движущей силы. Послѣдняя обыкновенно не зависитъ отъ времени и измѣняется только съ разстоянiемъ. Всемiрное тяготѣнiе, точно такъ же какъ и молекулярныя силы, представляетъ собою функцiи разстоянiй, заключающихся между тѣлами или частицами матерiи. Пока эти разстоянiя не мѣняются, силы сохраняютъ свое напряженiе и не расходуются. Пока тѣло остается подвѣшеннымъ на одной и той же высотѣ надъ поверхностью земли, сила тяжести не измѣняется и не уменьшается. Расходъ ея начинается лишь послѣ того, какъ тѣло начнетъ двигаться, и происходитъ во все время движенiя тѣла. Ожидаемое дѣйствiе силы измѣряется, слѣдовательно, произведенiемъ изъ напряженiя ея на пройденный путь, но его нельзя вывести непосредственно изъ произведенiя напряженiя на время. Для того—чтобы вычислить его — слѣдовало бы опредѣлить пройденный путь, соотвѣтствующiй разсматриваемому промежутку времени. Съ другой стороны, наши промышленныя работы, ихъ *расходъ*, въ экономическомъ смыслѣ слова, требуютъ принятiя въ расчетъ пройденнаго пространства, потому что этотъ расходъ почти всегда находится отъ него въ зависимости. Онъ часто ему пропорцiоналенъ. Очень рѣдко онъ связанъ съ временемъ, или же связь его съ нимъ бываетъ второстепенная. Вода въ каскадѣ расходуется, смотря по тому, работаетъ-ли машина, иначе говоря, смотря по тому, перемѣщается-ли точка приложенiя силы. Паръ потребляется по мѣрѣ поднятiя поршня въ цилиндрѣ; расходъ топлива былъ бы равенъ нулю, когда машина находится въ покоѣ, еслибы мы сумѣли избѣжать потери теплоты. Промышленность, точно такъ же какъ и теоретическая наука,

приспособляется, поэтому, къ такой формулѣ, куда разстояніе входитъ явнымъ образомъ, вмѣсто времени, важность котораго въ этомъ отношеніи гораздо менѣе.

Нѣкоторыя силы, именно, тѣ, носителями которыхъ являются одушевленныя существа, а также электрическіе токи, расходуются и истощаются отъ дѣйствія времени, даже безъ всякаго перемѣщенія точекъ ихъ приложенія. Человѣкъ устаетъ держать тяжесть въ неподвижномъ положеніи. Электрическій токъ расходуется на развитіе притяженія, для того, чтобы поддержать на вѣсу грузъ. Но такое употребленіе усилій встрѣчается лишь въ исключительныхъ случаяхъ, вообще же одушевленные двигатели употребляются, какъ и механическіе, для перенесенія тяжестей изъ одного мѣста въ другое или для преодолѣнія сопротивленій во время пути. Формула работы и живой силы точно также, слѣдовательно, можетъ примѣняться и для нихъ.

Въ виду этихъ различныхъ основаній геометры отдаютъ замѣтное предпочтеніе этому отношенію и постоянно имъ пользуются. Во многихъ случаяхъ, когда движущіяся тѣла обладаютъ однимъ только способомъ перемѣщенія, его бываетъ достаточно для опредѣленія движенія. Въ хорошо устроенной машинѣ, гдѣ каждая точка можетъ описывать только одну линію, знаніе работы двигателя, т. е. произведенія движущей силы на пройденный путь, даетъ возможность опредѣлить все движеніе машины и функціонированіе каждой изъ ея частей. Наконецъ, отношеніе живой силы оказываетъ ту неоцѣнимую услугу, что позволяетъ въ точности опредѣлить термо-динамическую эквивалентность. Теплота не обладаетъ эквивалентностью съ количествомъ движенія въ алгебраическомъ смыслѣ слова, т. е., съ массой, помноженной на скорость. Но она эквивалентна живой силѣ и измѣряется работой. Чтобы получить ея аналитическое выраженіе, надо взять массу, помноженную на половину квадрата скорости. Она представляетъ силу, умноженную не на время, а на пройденное пространство. Этотъ результатъ, полученный путемъ опыта, согласенъ съ физическими теоріями, уподобляющими теплоту колебательному движенію. Съ указанной точки зрѣнія, теплота тѣла представляетъ собою нѣкоторую сумму живыхъ силъ частицъ, составляющихъ тѣло. Ничего нѣтъ удивительнаго въ томъ, что она эквивалентна динамической работѣ.

Эти новыя воззрѣнія на механику, и все болѣе и болѣе

замѣтное стремленіе тѣсно связать ее съ физикой, созданная термодинамикой концепція эквивалентности между великими силами природы, болѣе или менѣе выражающейся количественно, и во всякомъ случаѣ поддающейся точному вычисленію между теплотой и движеніемъ, вызвали нужду въ болѣе широкомъ и менѣе спеціализованномъ терминѣ, чѣмъ выраженіе „живая сила", которое, повидимому, сохранилось для однихъ лишь механическихъ дѣйствій. Слово *энергія* было принято съ общаго согласія какъ геометровъ, такъ и физиковъ. Оно одинаково хорошо объясняетъ силу, накопленную въ тѣлѣ, какъ подъ видомъ теплоты, электричества или химическаго сродства, такъ и въ формѣ динамической живой силы.

Находящійся въ нѣдрахъ земли каменный уголь представляетъ собой солнечную энергію, накопленную вѣками. Носящійся въ воздухѣ водяной паръ произведетъ, при своемъ сгущеніи и паденіи на землю въ видѣ осадка, силу и теплоту. Растеніе, животное образуютъ машины, которыя потребляютъ внѣшнюю энергію, заключающуюся въ питательныхъ веществахъ, чтобы воспроизвести ее потомъ подъ различными видами. Волевые акты, согласно послѣднимъ физіологическимъ изслѣдованіямъ, сопровождаются электрическими токами, расходъ которыхъ соотвѣтствуетъ производимымъ дѣйствіямъ. Вселенная, съ точки зрѣнія современной науки, есть громадная лабораторія, гдѣ происходитъ безпрестанное превращеніе энергіи.

Въ природѣ энергія является въ двухъ очень различныхъ формахъ: въ видѣ *возможной силы* и въ видѣ *реализованнаго дѣйствія*. Тѣло, помѣщенное на нѣкоторой высотѣ надъ поверхностью земли, представляетъ собою въ возможности количество энергіи или живой силы, которое оно разовьетъ при паденіи, подъ вліяніемъ тяготѣнія, до тѣхъ поръ пока не встрѣтитъ поверхности земли. Вѣсъ его, помноженный на высоту паденія, выражаетъ скрытую или *потенціальную* работу, находящуюся въ немъ до начала работы. Въ концѣ паденія то же самое произведеніе представляетъ работу уже не въ возможности, а совершенную и, слѣдовательно, динамическую живую силу, накопленную въ тѣлѣ этой работой. Въ какой нибудь промежуточной точкѣ, скрытая или потенціальная энергія относительно точки отправленія дѣлится на двѣ части: одну, которая представляютъ собой живую силу, развившуюся подъ вліяніемъ начавшагося паденія и называемую *дѣй-*

ствительной энергіей или живой силой въ собственномъ смыслѣ слова; другую, заслуживающую, по прежнему, названія энергіи *потенціальной* и служащую дополненіемъ къ живой силѣ, развивающейся при дальнѣйшемъ паденіи. Говоря кратко, «сообщенная тѣлу общая энергія равна суммѣ энергій дѣйствительной и потенціальной». Каждая изъ нихъ увеличивается или уменьшается, когда другая уменьшается или увеличивается, но сумма ихъ остается безъ перемѣны. Въ этомъ состоитъ *законъ сохраненія живой силы*. Онъ выражаетъ ту истину, что тѣло не можетъ измѣнить того количества энергіи, которое въ немъ содержится, вслѣдствіе занимаемаго имъ положенія по отношенію къ прочимъ тѣламъ вселенной. Такимъ образомъ, земной шаръ заключаетъ въ себѣ, по отношенію къ солнцу, общую энергію, измѣряющуюся живой силой, обладаемой имъ въ настоящее время, и той, которую онъ пріобрѣлъ бы въ томъ случаѣ, если бы, согласно съ закономъ всемірнаго тяготѣнія Ньютона, могъ падать свободно на солнце, не поддерживаясь болѣе пріобрѣтенной скоростью. Обѣ эти живыя силы непрерывно измѣняются, по мѣрѣ того какъ земля, описывая свою орбиту, удаляется или приближается къ солнцу, но сумма ихъ остается всегда одной и той же.

Не слѣдуетъ смѣшивать принципъ сохраненія энергіи съ закономъ инерціи.

Законъ инерціи относится лишь къ тѣламъ, дѣйствительно обладающимъ скоростью, и выражаетъ, что эта ихъ скорость сохраняется во всей своей цѣлости, если никакое внѣшнее препятствіе ея не разрушаетъ. А принципъ энергіи имѣетъ въ виду сохраненіе самой силы; онъ предполагаетъ, что эта сила не ослабѣваетъ со временемъ и должна поэтому производить тѣ же самыя дѣйствія, въ какой бы моментъ мы ихъ ни опредѣляли. Земля сохраняетъ свою энергію относительно солнца, потому что всемірное тяготѣніе дѣйствуетъ одинаково каждый годъ. Если бы это притяженіе могло испытывать уменьшеніе съ теченіемъ времени, то законъ сохраненія энергіи былъ бы невѣренъ, между тѣмъ какъ законъ инерціи продолжалъ бы существовать. Скорости, пріобрѣтаемыя тѣлами подъ вліяніемъ этихъ уменьшающихся силъ, однажды опредѣлившись, оставались бы, тѣмъ не менѣе, безъ измѣненія.

Принципъ сохраненія энергіи основывается, слѣдовательно, на молчаливомъ признаніи того факта, что естественныя силы не зависятъ отъ времени. Онѣ являются такими, обык-

новенно, при нашихъ наблюденіяхъ, и это то именно и даетъ намъ право признавать постоянство энергіи во вселенной.

ГЛАВА VI.

Сохраненіе движенія Энергіи въ природѣ.

Солнечную систему можно разсматривать, какъ бы совершенно изолированной во вселенной. Окружающія ее звѣзды слишкомъ удалены отъ нея и потому, не смотря на свою многочисленность, не могутъ производить на нее никакого замѣтнаго вліянія. Свѣтъ, получаемый нами отъ совокупности всѣхъ звѣздъ, не превосходитъ того, который могли бы испускать 320 звѣздъ первой величины [1]). Если принять то же самое основаніе и для вычисленія притяженія, которое уменьшается по тому же закону, что и напряженность свѣта, то пришлось бы заключить, что совокупность свѣтилъ оказываетъ на нашу солнечную систему дѣйствіе, равносильное притяженію 320 звѣздъ первой величины или 320 солнцъ подобныхъ нашему. Звѣзды же первой величины, находящіяся на среднемъ разстояніи въ милліонъ разъ большемъ разстоянія земли отъ солнца, производятъ каждая въ отдѣльности притяженіе на нашъ земной шаръ равное одной трилліонной притяженія солнца, а притяженіе 320 звѣздъ будетъ находиться къ притяженію солнца въ отношеніи 1 къ 31 милліарду, т. е. будетъ представлять количество совершенно ничтожное. Поэтому мы вправѣ считать солнечную систему, какъ бы находящеюся исключительно подъ вліяніемъ своихъ внутреннихъ силъ (тяготѣнія и всякаго рода дѣйствій), развивающихся между тѣлами и между частицами ихъ крайняго дѣленія.

Если бы мы вздумали вычислять то, что происходитъ съ каждымъ тѣломъ, и тѣмъ болѣе съ каждой частицей матеріи, мы натолкнулись бы на непреодолимыя трудности. Дѣйствія до того многочисленны, законы, управляющіе ими, такъ еще мало извѣстны, относительныя положенія ихъ измѣняются съ такой быстротой, наконецъ, совокупность всѣхъ подроб-

---

[1]) Sur l'origine du monde, par M. H. Faye, de l'Institut, 2-e édition, page 180. См. также Le Soleil, du R. P. Secchi, tome II, livre VIII.

ностей до такой степени сложна, что даже самый обширный умъ не въ состояніи даже подумать о томъ, чтобы произвести приближенный анализъ явленій, слѣдующихъ другъ за другомъ въ нашемъ мірѣ. Но если избрать обратный путь, если, вмѣсто того, чтобы пользоваться анализомъ, примѣнить синтезъ, то возможно извлечь нѣсколько общихъ результатовъ и вывести принципы, которые по ихъ простотѣ могутъ быть сравнены съ основными законами движенія: выражаясь правильнѣе, эти принципы окажутся результатами непосредственнаго преобразованія названныхъ законовъ.

Вслѣдствіе закона равенства между дѣйствіемъ и противодѣйствіемъ всякое движеніе, которое происходитъ или стремится произойти въ какой нибудь точкѣ системы, обладаетъ въ точности соотвѣтствующимъ ему противоположнымъ движеніемъ или стремленіемъ къ движенію въ какой-нибудь другой точкѣ. Притяженія и отталкиванія попарно противоположны. Одно тѣло, трущееся объ другое, стремится увлечь его за собою съ той же силой, которую второе употребляетъ для того, чтобы его удержать. Сопротивленіе движенію, противопоставляемое средой болѣе или менѣе плотной, жидкой или газообразной, или даже порошкообразной, побуждаетъ насъ сдѣлать то же замѣчаніе: эта среда получаетъ то же давленіе и претерпѣваетъ то же треніе, которое производитъ сама на тѣло во время его перемѣщенія. Удары, взрывы не нарушаютъ равновѣсія; потому что въ то время, когда совершается явленіе, нѣкоторыя части тѣла сжимаются или расширяются на подобіе пружинъ и доставляютъ въ каждое мгновеніе равныя и прямо противоположныя дѣйствія. Даже самая связь, соединяющая тѣла одни съ другими и долженствующая, повидимому, служить препятствіемъ для ихъ естественной подвижности, не можетъ ничего измѣнить въ общемъ: гнутіе, растяженіе, напряженіе этихъ связей разрѣшаются въ молекулярныя дѣйствія, пріобрѣтающія повсюду характеръ взаимопротивоположности. Короче, какъ только въ солнечной системѣ исключить вліяніе окружающихъ ее міровъ, остается лишь безчисленное разнообразіе большихъ или малыхъ, постоянныхъ или временныхъ, близкихъ или отдаленныхъ силъ, постоянно равныхъ попарно другъ другу и противоположныхъ по направленіямъ. Если бы явилась возможность вдругъ закрѣпить неподвижно всю систему, т. е. соединить всѣ тѣла и всѣ матеріальныя частицы не гибкими и нерастяжимыми стержнями, сообщающими ей отнынѣ неизмѣнную форму, то силы

уравновѣсились бы взаимно и были бы неспособны произвести какое-либо движенiе.

На самомъ же дѣлѣ система вовсе не заключена въ такiя оковы, и части ея обладаютъ большей или меньшей свободой однѣ относительно другихъ. Поэтому то общее равновѣсiе и не превращается въ неподвижность. Напротивъ, тѣла находятся въ постоянномъ движенiи, и ихъ относительныя скорости измѣняются до безконечности. Двѣ взаимно противоположныя силы, подобныя дѣйствующимъ между солнцемъ и землей, уже по тому одному, что онѣ дѣйствуютъ на совершенно различныя массы, не могутъ производить одинаковыя перемѣщенiя. Болѣе значительная масса движется медленнѣе, чѣмъ та, которая меньше ея. Но скорости находятся въ обратномъ отношенiи къ массамъ, такъ что количества движенiя будутъ всегда одинаковы по величинѣ, но обратны по знаку.

Если мысленно представить себѣ частныя количества движенiя, развивающiяся въ каждое мгновенiе въ различныхъ точкахъ системы, собранными въ громадную картину; если затѣмъ проектировать ихъ на какую-нибудь прямую линiю и взять ихъ сумму, то эта послѣдняя въ значенiи ариѳметическомъ будетъ всегда одна и та же. Удары и взрывы, если они случатся, будутъ представлены одинаково нѣкоторымъ количествомъ членовъ какъ положительныхъ, такъ и отрицательныхъ, но не измѣнятъ окончательнаго результата сложенiя. Слѣдовательно, общее количество движенiя солнечной системы во всѣхъ направленiяхъ или равно нулю или постоянно.

Перемѣщенiе центра тяжести какой-нибудь системы, какъ извѣстно, опредѣляется значенiемъ общаго количества движенiя. Если это количество постоянно, то центръ тяжести движется равномѣрно. Центръ тяжести солнечной системы долженъ, на основанiи этого закона, илибыть неподвижнымъ или же обладать неизмѣнной скоростью.

Сдѣланное въ настоящемъ столѣтiи открытiе быстраго движенiя солнца къ созвѣздiю Геркулеса, исключаетъ первую гипотезу. Солнечная система въ цѣломъ обладаетъ, слѣдовательно, равномѣрнымъ движенiемъ, такъ какъ внѣшними дѣйствiями на нее возможно совершенно пренебречь. Во всякомъ случаѣ это положенiе можетъ съ теченiемъ времени измѣниться, если система вслѣдствiе своего постояннаго перемѣщенiя настолько приблизится къ звѣздамъ, что онѣ будутъ производить на нее замѣтное влiянiе.

Въ природѣ поступательное движеніе центра тяжести никогда не существуетъ одно, оно всегда сопровождается вращеніемъ вокругъ этого центра. Иначе этого и быть не можетъ безъ совпаденія совершенно особенныхъ обстоятельствъ. Въ случаѣ твердаго тѣла, напримѣръ, необходимо, чтобы общая равнодѣйствующая импульсовъ, сообщившихъ ей его начальную скорость, проходила строго черезъ центръ тяжести. Поэтому уже само поступательное движеніе нашей системы давало бы поводъ заключить съ безконечно большой вѣроятностью объ общемъ вращеніи ея частей вокругъ солнца, если бы Ньютонъ и Лапласъ не сдѣлали этого раньше непосредственно, выходя изъ наблюденій вращенія планетъ. Въ настоящее время это доказано безусловно наблюдаемымъ при посредствѣ пятенъ вращеніемъ солнца вокругъ самого себя.

Насъ приводитъ къ этимъ заключеніямъ сохраненіе количества движенія, которое, какъ мы уже замѣтили, представляетъ собою, не *абсолютное* сохраненіе движенія, а простое постоянство алгебраической суммы частныхъ количествъ, опредѣленныхъ относительно какого нибудь направленія. Но оно ничего не доказываетъ относительно сохраненія живой силы и энергіи, которыя опредѣляются совершенно иначе. Чтобы дать себѣ въ этомъ отчетъ, слѣдуетъ возвратиться къ предыдущимъ разсужденіямъ.

Въ той системѣ, гдѣ тѣла мѣняютъ положеніе одни относительно другихъ, и гдѣ отдѣльныя скорости измѣняются, живая сила всей разсматриваемой совокупности испытываетъ постоянныя перемѣны. Живая сила земного шара, напримѣръ, увеличивается или уменьшается, смотря по тому, ускоряется ли или замедляется ея движеніе вокругъ солнца. Живая сила свѣтилъ, точно такъ же какъ и всякаго рода матеріальныхъ частицъ, можетъ получить одно и то же значеніе лишь тогда, если, въ нѣкоторый данный моментъ, эти свѣтила и эти частицы прошли бы точь въ точь черезъ тѣ же самыя положенія, черезъ которыя онѣ проходили раньше; говоря такъ, я имѣю въ виду, что онѣ оказались бы въ одинаковыхъ разстояніяхъ другъ отъ друга. За исключеніемъ этого всеобщаго совпаденія, которое, конечно, никогда не повторяется, живая сила системы подвержена постояннымъ измѣненіямъ. Но эти измѣненія исчезаютъ, если разсматривать не только дѣйствительную живую силу тѣлъ, но въ то же время и ихъ потенціальную живую силу, являющуюся необходимымъ дополненіемъ первой. Лишь бы силы были функ-

ціями исключительно однихъ только разстояній и лишь бы онѣ не уменьшались, съ теченіемъ времени, сумма этихъ живыхъ силъ или общая энергія не можетъ измѣниться. Этотъ, именно, случай и представляетъ собою солнечная система, съ ея внутренними взаимодѣйствіями и благодаря эквивалентности энергій.

Во время обращенія планеты вокругъ центральнаго свѣтила, или спутника вокругъ его планеты, энергія, представленная, въ каждый моментъ, и пріобрѣтенною скоростью, и тою, которую могло бы произвести уменьшеніе разстоянія, остается постоянной. То же самое обнаруживается при изслѣдованіи дѣйствій силъ молекулярныхъ и химическаго сродства. Повсюду общая энергія остается безразличной къ перемѣнамъ положенія, такъ какъ каждый изъ ея двухъ членовъ увеличивается всегда на столько, на сколько уменьшается другой. Безъ сомнѣнія, непредвидѣнный ударъ, встрѣча двухъ свѣтилъ значительно измѣнили бы динамическую живую силу. Но исполненіе внутренней работы, являющейся въ результатѣ столкновенія этихъ большихъ массъ, и образованіе громаднаго количества теплоты, вознаградили бы уничтоженіе живой силы. Общая энергія приняла бы въ такомъ случаѣ другую форму, но сохранила бы свою величину. Страшный взрывъ, подобный тому, который можетъ быть, разбилъ въ дребезги, въ космогоническія эпохи, нѣкоторыя планеты, оставившія по себѣ одно лишь воспоминаніе въ траекторіи центра тяжести ихъ безчисленныхъ обломковъ, увеличилъ бы вдругъ живую силу всей системы. Но эта живая сила была бы пріобрѣтена цѣною энергіи, заключающейся въ тѣхъ веществахъ, которыя своимъ расширеніемъ внутри планеты произвели катастрофу. Въ дѣйствительности не было бы никакого увеличенія силы, а только простое преобразованіе скрытой или потенціальной энергіи въ динамическую живую силу.

Эта твердая увѣренность въ томъ, что у насъ на земномъ шарѣ и въ цѣлой солнечной системѣ не создается нисколько движенія, нельзя ожидать ни откуда прибавленія энергіи, считалась нѣкоторыми философами аргументомъ въ пользу мнѣнія, извѣстнаго подъ названіемъ *детерминизма*. Свобода человѣка, въ общепринятомъ значеніи этого слова, нарушала бы, какъ говорятъ, необходимое равновѣсіе природы; такъ какъ она порождала бы движенія безъ соотвѣтственнаго имъ противодѣйствія. Самопроизвольность, воля должны быть, поэтому, лишь явленіями кажущимися.

подъ которыми скрывается правильное дѣйствіе силъ, встрѣчающихся въ физическомъ мірѣ. Наши поступки, считаемые самыми свободными, являются, согласно этому воззрѣнію, безъ нашего вѣдома, слѣдствіемъ предшествующихъ движеній или внѣшнихъ вліяній. Потому что прежде всего требуется, какъ говорятъ детерминисты, чтобы сохранился великій законъ постоянства энергіи, и человѣкъ, какъ и всякій другой дѣятель, не могъ бы нарушить его примѣненіе.

Прежде всего, замѣчу я, такое распространеніе принциповъ динамики на отправленіе человѣческой дѣятельности не представляется законнымъ. Законы, на которые опираются возраженія детерминистовъ, были открыты путемъ непосредственныхъ наблюденій, и эти послѣднія относились исключительно къ явленіямъ міра физическаго. Ни одному физику не удалось еще проникнуть въ тѣ таинственныя лабораторіи, гдѣ зарождается воля и провѣрить—существуетъ-ли въ этой области точное равенство между дѣйствіемъ и противодѣйствіемъ. Я не думаю, чтобы человѣкъ былъ способенъ создать движеніе, но я утверждаю, что общіе законы механики не доказываютъ противнаго. Въ высшей степени поучительные анализы, произведенные надъ передачей волевыхъ импульсовъ отъ мозга къ конечностямъ органовъ нашего тѣла, столь замѣчательное открытіе электрическихъ, токовъ, сопровождающихъ повидимому всѣ наши усилія и даже наши самыя мимолетныя мысли, все-таки, нисколько не объясняютъ образованія первичнаго импульса, иниціативы, наконецъ того, чему я не могу придумать названія, но что приводитъ въ дѣйствіе машину и влечетъ за собою ея дальнѣйшія движенія. Вплоть, именно, до этого пункта и необходимо было бы доказать, что внутреннія дѣйствія разбиваются на двѣ, всегда взаимно-противоположныя части, подобно тому какъ это происходитъ въ мірѣ физическомъ. Но такого доказательства пока еще не было дано, и я не знаю, будетъ-ли оно когда-нибудь дано. А пока, примѣненіе принципа живыхъ силъ остается лишеннымъ основанія и не можетъ служить аргументомъ ни въ пользу свободы воли, ни противъ нея.

Но если бы даже было доказано, что одушевленныя существа, въ частности-же человѣкъ, не способны создавать движенія—я съ своей стороны вполнѣ склоняюсь къ этому мнѣнію—то отсюда еще вовсе не слѣдуетъ съ необходимостью, чтобы это обстоятельство противорѣчило фак-

ту нравственной свободы. Я думаю, напротивъ, что оба вывода вполнѣ согласимы между собою. Болѣе глубокое изученіе явленія разрѣшаетъ эту кажущуюся антиномію, какъ я попробовалъ показать это ниже. Во всякомъ случаѣ я думаю, что одинаково неосновательно было бы сдѣлать заключеніе на основаніи законовъ динамики противъ свободы, какъ и наоборотъ, на основаніи свободы противъ законовъ динамики. Это—два совершенно различные порядка идей, между которыми мнѣ кажется химерическимъ искать точекъ соприкосновенія.

У насъ нѣтъ никакого прямого и формальнаго доказательства того, что законы, управляющіе солнечной системой, управляютъ точно такъ же и другими системами вселенной. Въ воображеніи можно себѣ представить такое состояніе матеріи, гдѣ могли бы быть приложены другіе законы. Знаменитый авторъ *Позитивной философіи* совѣтовалъ, можетъ быть съ излишней осторожностью, избѣгать всякихъ умозрѣній относительно тѣхъ міровъ, которые должны быть, говоритъ онъ, навсегда намъ недоступны. Съ того времени прогрессъ астрономіи и физики далъ намъ такія указанія, которыя, хотя и не являются рѣшительными доказательствами, тѣмъ не менѣе доставляютъ уму, свободному отъ предразсудковъ, нѣкоторыя данныя для сужденій относительно явленій, совершающихся въ другихъ системахъ мірозданія. Уже движеніе кометъ давало тѣмъ, кто вмѣстѣ съ Лапласомъ считалъ эти свѣтила чуждыми солнечной системѣ, поводъ думать, что даже самая отдаленная матерія повинуется закону тяготѣнія, потому что, достигнувъ сферы дѣятельности солнца, тѣла эти движутся подобно планетамъ, съ тою лишь разницею, что ихъ орбиты гораздо болѣе удлинены. Слѣдовательно, кометы какъ-бы явились къ намъ сообщить о томъ, что происходитъ въ отдаленныхъ областяхъ вселенной и познакомить насъ съ матеріей, доступной тѣмъ же вліяніямъ, которыя господствуютъ вокругъ насъ. Движеніе двойныхъ звѣздъ, можетъ быть, покажется болѣе знаменательнымъ. Не обладая возможностью строго опредѣлить ихъ траекторіи, астрономы настолько подвинулись впередъ въ своихъ наблюденіяхъ, что могли изъ нихъ сдѣлать выводъ о согласіи взаимнаго движенія этихъ звѣздъ съ закономъ тяготѣнія Ньютона, причемъ сохранялась полная взаимо-противоположность ихъ дѣйствій. Свѣтъ не только этихъ звѣздъ, но и всѣхъ тѣхъ, движеніе которыхъ констатировано на небесномъ сводѣ,

достигаетъ нашего земного шара по обыкновеннымъ законамъ; онъ даже далъ дѣйствительную возможность вычислить точно, при помощи явленій абераціи, поступательную скорость различныхъ звѣздъ, выведенную уже изъ наблюденій ихъ относительнаго положенія. Наконецъ—и это, можетъ быть, одинъ изъ важнѣйшихъ фактовъ—спектральный анализъ открылъ во многихъ звѣздахъ нѣсколько химическихъ элементовъ, существующихъ также на землѣ и на солнцѣ. Было бы весьма необыкновенно, если бы одна и та же матерія находилась въ столь отдаленныхъ отъ насъ мірахъ, если бы она пускала свѣтъ, подчиняющійся тѣмъ же самымъ законамъ, такъ же точно разлагающійся спектроскопомъ и распространяющійся съ той же скоростью, какъ и у насъ, и если бы въ то же самое время состояніе этой матеріи настолько глубоко отличалось отъ нашего, что она не подчинялась бы ни закону тяготѣнія, ни закону равенства между дѣйствіемъ и противодѣйствіемъ, ни одному изъ тѣхъ законовъ, которые служатъ основаніемъ механики.

Вселенная или „совокупность видимыхъ свѣтилъ", по выраженію Фэя [1]), будучи приравнена, такимъ образомъ, солнечной системѣ въ отношеніи внутреннихъ силъ, составляетъ цѣлое, еще болѣе совершенно изолированное въ неопредѣленномъ пространствѣ, чѣмъ наша солнечная система. Потому что, если мы нашли ничтожную дробь для выраженія притяженія нашей системы совокупностью звѣздъ, то каково же можетъ быть вліяніе на эти послѣднія другихъ свѣтилъ, до такой степени удаленныхъ, что свѣтъ ихъ исчезаетъ для насъ? Окружающій ихъ, по нашимъ понятіямъ, мракъ можетъ быть объясненъ двояко: или тѣмъ, что ихъ разстояніе слишкомъ велико для того, чтобы свѣтъ могъ его пройти со времени ихъ созданія, или же онѣ составляютъ такія слабыя скопленія, что ихъ свѣтъ, хотя и достигъ до насъ, но не оказывается чувствительнымъ для нашихъ инструментовъ. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ, ихъ масса, очевидно, не оказываетъ вліянія на то громадное скопленіе матеріи, часть котораго мы составляемъ.

Слѣдовательно, вселенная, относительно сохраненія движенія и энергіи, находится, согласно излагаемому нами воззрѣнію, въ тѣхъ же условіяхъ, какъ наша солнечная си-

---

[1]) Сочиненіе, указанное на стр. 125.

стема. Ея центръ тяжести, несмотря на отдѣльныя перемѣщенія звѣздъ, бороздящія во всѣхъ направленіяхъ пространство, или неподвиженъ, или движется равномѣрно. Сильнѣйшія катастрофы, какъ и самыя медленныя преобразованія не въ состояніи ни нарушить этого начальнаго условія, ни измѣнить той дозы энергіи, которая была вложена въ нее вначалѣ, при ея образованіи. Явленія смѣняются одни другими, наружный видъ подвергается перемѣнамъ, положенія принимаютъ другой видъ, небо, созерцаемое черезъ долгіе промежутки времени, становится неузнаваемымъ, но законъ постоянства и сохраненія остается справедливымъ всегда. Вселенная заключаетъ въ каждый данный моментъ запасъ силы, который она однажды получила.

ГЛАВА VII.

Возможныя причины растраты энергіи.

Предыдущее заключеніе неопровержимо. Но для этого, однако, требуется выполненіе одного условія, котораго никогда не слѣдуетъ терять изъ виду: а именно, что физическіе агенты не измѣняются съ теченіемъ времени и что они не могутъ ослабѣть въ промежуткѣ между двумя слѣдующими одна за другой эпохами.

Въ самомъ дѣлѣ, какая въ томъ нужда, что въ эти двѣ эпохи разстоянія, отъ которыхъ зависятъ дѣйствія, окажутся совершенно тѣми же самыми, если въ промежутокъ между ними уменьшилось ихъ дѣйствительное значеніе, какъ, напримѣръ, въ томъ случаѣ, когда притяженіе между двумя тѣлами не сохранило, при одномъ и томъ же разстояніи, той же самой напряженности? Ясно, что въ этомъ случаѣ численное значеніе энергіи измѣняется.

Вопросъ въ томъ, слѣдовательно, возможны ли такія ослабленія во вселенной.

Прежде нежели изслѣдовать его, я обращу вниманіе на то, что даже при такомъ предположеніи количество движенія, согласно приведенному выше опредѣленію, не измѣнится. Въ самомъ дѣлѣ, оно зависитъ отъ алгебраическаго суммированія членовъ, положительныхъ и отрицательныхъ, абсолютная величина которыхъ безразлична, лишь бы они попарно были въ точности взаимо-противоположны.

Слѣдовательно, если законъ равенства между дѣйствіемъ и противодѣйствіемъ не перестаетъ существовать (несмотря на указанное измѣненіе въ напряженіи силъ), то алгебраическая сумма не измѣнится; такъ какъ всякое уменьшеніе положительнаго члена будетъ вознаграждаться увеличеніемъ члена отрицательнаго. Короче говоря, если бы даже всѣ частныя движенія замедлились, то ихъ сумма, все таки, осталось бы тою же самой. Центръ тяжести, перемѣщеніе котораго связано со значеніемъ этой суммы, продолжалъ бы оставаться безъ движенія или же сохранялъ бы постоянную скорость.

Совершенно иное происходитъ съ живой силой или съ энергіей. Послѣдняя не зависитъ отъ суммированія членовъ съ противоположными знаками, но требуетъ разсмотрѣнія движенія, не принимая въ расчетъ знака. Если два тѣла стремятся одно къ другому вслѣдствіе взаимнаго притяженія, то сумма ихъ живыхъ силъ въ каждое мгновеніе зависитъ отъ пройденнаго пути; и если, въ двѣ слѣдующія одна за другой эпохи, пройденный путь остается постояннымъ, но напряженность притяженія уменьшается, то эта сумма уменьшится въ той же самой пропорціи. Если живая сила измѣнилась бы въ какой-нибудь моментъ въ физическую энергію, теплоту или электричество, то и эта энергія окажется такъ же уменьшенной въ той же самой пропорціи.

Сохраненіе живой силы или энергіи солнечной системы зависитъ, слѣдовательно, существеннымъ образомъ отъ постоянства напряженности внутреннихъ дѣйствій, которыя въ ней происходятъ. До сихъ поръ астрономы не имѣютъ никакого основанія думать, чтобы коэффиціентъ всемірнаго тяготѣнія былъ способенъ измѣняться въ зависимости отъ времени. Малѣйшее измѣненіе его произвело бы перемѣну въ обращеніи планетъ: земля употребляла бы больше времени для того, чтобы пройти свою орбиту, и астрономы, конечно, замѣтили бы это по увеличенію продолжительности звѣзднаго года. Физики, съ своей стороны, точно такъ же, какъ и химики, не замѣтили ни одного признака, на основаніи котораго можно было бы предположить, что всякаго рода молекулярныя силы претерпѣваютъ какое-нибудь измѣненіе. Кажется, не на этомъ пути слѣдуетъ искать возможныхъ причинъ растраты энергіи.

Нѣтъ также необходимости останавливаться на другихъ причинахъ, еще окруженныхъ глубокимъ мракомъ; ихъ влі-

яніе на общую энергію равно нулю или очень слабо. Дѣйствіе приливовъ, даже еслибы оно должно было привести впослѣдствіи, какъ это предвидитъ Г. Х. Дарвинъ (G. H. Darwin), къ сближенію луны съ землей и къ уменьшенію живой силы этихъ двухъ небесныхъ тѣлъ, возстановило бы эквивалентное количество энергіи теплотой, выдѣлившейся при треніи жидкихъ частей о части твердыя. Изслѣдованныя Кэ (Quet) индукціонныя дѣйствія между солнцемъ и планетами точно также не оказываютъ вліянія, потому что принадлежатъ къ категоріи силъ взаимно-противоположныхъ. Аэролиты, повидимому, приносятъ на землю, въ формѣ удара и теплоты, нѣкоторое количество живой силы, равное тому, которымъ они сами обладали до своего паденія на землю. Кометы, смотря по тому, принадлежатъ онѣ или нѣтъ солнечной системѣ, не мѣняютъ своей общей энергіи вовсе или же измѣняютъ ее чрезвычайно мало, вслѣдствіе незначительности массы этихъ свѣтилъ. Но съ двумя другими причинами слѣдуетъ познакомиться ближе.

Первая заключается въ сопротивленіи движенію свѣтилъ, оказываемомъ средой, въ которой онѣ находятся. Вопросъ объ этомъ, несмотря на свою важность и большое число фактовъ, съ которыми онъ соприкасается, не рѣшенъ еще окончательно. Многіе астрономы, вмѣстѣ съ Лапласомъ, отрицаютъ это вліяніе или же считаютъ его совершенно ничтожнымъ. Когда было извѣстно одно ускореніе средняго движенія луны, говоритъ Лапласъ,—его можно было приписывать сопротивленію эфира или постепенной передачѣ тяготѣнія. Но математическій анализъ показываетъ намъ, что обѣ указанныя причины не могутъ произвести никакого чувствительнаго нарушенія въ среднемъ движеніи лунныхъ узловъ и луннаго перигелія, а этого одного уже достаточно, чтобы исключить ихъ, хотя бы истинная причина измѣненій, наблюдаемыхъ въ этихъ движеніяхъ, была и неизвѣстна. Согласіе теоріи съ наблюденіями доказываетъ намъ, что если среднія движенія луны и измѣняются вслѣдствіе причинъ, чуждыхъ всемірному тяготѣнію, то ихъ вліяніе, все-таки, очень мало и до сихъ поръ нечувствительно.

„Это согласіе точно устанавливаетъ постоянство сутокъ, существенный элементъ всѣхъ астрономическихъ теорій. Если бы продолжительность астрономическаго дня въ настоящее время оказалась больше на одну сотую секунды его продолжительности во времена Гиппарха, то въ этомъ

случаѣ вѣкъ, въ которомъ мы живемъ, оказался бы на 365,25 продолжительнѣе вѣка временъ Гиппарха, а между тѣмъ наблюденія не позволяютъ предположить столь значительнаго увеличенія; слѣдовательно, можно утверждать съ увѣренностью, что со времени Гиппарха продолжительность астрономическаго дня не измѣнилась даже и на одну сотую секунды“ *).

За то физики, для объясненія свѣтовыхъ, тепловыхъ и электрическихъ явленій, признаютъ существованіе эфирной среды, сопротивленіе которой движенію тѣлъ нельзя не допустить до извѣстной степени, если считать ее способной приводить въ колебаніе частицы тѣлъ. Нѣкоторые ученые готовы даже признать въ междупланетныхъ пространствахъ существованіе метеорической, весьма разрѣженной матеріи, ускользнувшей до сихъ поръ отъ постепеннаго сгущенія первообразной туманности. „Хотя существованіе сопротивляющейся среды и обнаруживается до сихъ поръ, повидимому, только ускореніемъ движенія кометы Энке, говоритъ К. Вольфъ, хотя оно, кажется, и не измѣнило движеній планетъ или ихъ спутниковъ въ теченіе историческаго періода, но, тѣмъ не менѣе, астрономы единодушно предполагаютъ, что междупланетныя пространства не представляютъ собою абсолютной пустоты. Ньютонъ писалъ, что движенія большихъ небесныхъ тѣлъ сохраняются *дольше* движенія тѣлъ, брошенныхъ въ земной атмосферѣ, потому что они происходятъ въ пространствахъ, оказывающихъ *меньшее сопротивленіе.* Недостаточно тысячелѣтій для обнаруженія вліянія сопротивленія эфирной среды или среды метеорической на движеніе планетъ: но развѣ возможно утверждать, что это сопротивленіе равно нулю и что оно не проявится въ достаточно продолжительный періодъ времени въ сокращеніи ихъ орбитъ“ **).

Если сопротивленіе метеорической среды подвержено сомнѣнію внутри солнечной системы, то тѣмъ болѣе оно сомнительно, повидимому, въ громадныхъ пространствахъ, отдѣляющихъ другъ отъ друга звѣзды. Еще менѣе вѣроятно, чтобы тамъ встрѣчалась матерія. Что же касается эфирной среды, то, если таковая существуетъ,—она должна находиться во всѣхъ частяхъ видимой вселенной, потому

---

*) Exposition du système du monde, 6-e édition, page 249.

**) Les hypothéses cosmogoniques, par M. C. Wolf, de l'institut, astronome de l'observatoire, page 97.

что при помощи нея до насъ доходитъ свѣтъ. Ея сопротивленіе, если оно будетъ признано внутри нашей системы, должно будетъ, поэтому, быть распространено на всѣ небесныя свѣтила. Но до тѣхъ поръ оно остается еще проблематичнымъ.

Вторая причина раструты энергіи, повидимому, менѣе сомнительна и болѣе значительна. Я говорю о постоянномъ лучеиспусканіи солнца и звѣздъ въ небесныхъ пространствахъ. Солнце, мы будемъ говорить пока только о немъ, испускаетъ чудовищное количество свѣтовыхъ, тепловыхъ, химическихъ и т. п. лучей, изъ которыхъ лишь очень небольшая часть достается на долю обращающихся вокругъ него свѣтилъ. Считается, что едва-едва одинъ лучъ изъ шестидесяти милліоновъ задерживается планетами и ихъ спутниками. Все же остальное количество солнечныхъ лучей разсѣевается въ пространствѣ, не участвуя, по крайней мѣрѣ, на сколько это можно замѣтить, ни въ одномъ изъ знакомыхъ намъ явленій. Что же происходитъ съ этимъ огромнымъ количествомъ энергіи? Исчезаетъ ли она безвозвратно и пропадаетъ въ неопредѣленныхъ колебаніяхъ эѳира, подобно тому какъ расширяются и исчезаютъ мало-по-малу на поверхности воды круги, произведенные паденіемъ твердаго тѣла? Или, напротивъ, она снова возвращается солнцу, благодаря какому-нибудь неизвѣстному механизму, поддерживающему постоянство его лучеиспусканія? И не находитъ ли солнце возмѣщеніе своихъ ежедневныхъ тратъ энергіи въ другихъ комбинаціяхъ въ случаѣ, если только что указанный родъ возстановленія энергіи не существуетъ? Большинство ученыхъ склоняются въ настоящее время къ первой гипотезѣ и считаютъ фактомъ постоянное уменьшеніе солнечной теплоты.

Трудно дать этому экспериментальное доказательство, потому что историческіе періоды по своей краткости не могутъ доставить точныхъ терминовъ сравненія. Лапласъ замѣтилъ, что, судя по явленіямъ прозябанія растеній, земная температура, и, слѣдовательно, напряженіе солнечнаго лучеиспусканія не должна была измѣниться со времени римлянъ. Поэтому-то люди и привыкли считать наше центральное свѣтило нѣкотораго рода неистощимымъ источникомъ тепла. Самъ Лапласъ, въ своей знаменитой космогонической теоріи, воздерживается отъ догадокъ по поводу конечной судьбы солнца. Но одновременный прогрессъ въ развитіи геологіи, термодинамики и, наконецъ, спектраль-

наго анализа доставляетъ на этотъ счетъ важныя указанія.

Постепенное охлажденіе земного шара въ предшествующіе періоды и сохраненіе теплоты въ его центрѣ не могутъ болѣе подлежать сомнѣнію. Геологи и физики приводятъ этому тысячи доказательствъ. Земной шаръ представляетъ собою свѣтило, нѣкогда ярко блиставшее, нынѣ же потухшее и утратившее часть энергіи, которая принадлежала ему въ эпоху его великолѣпія. Почему бы не быть тому же самому и съ солнцемъ, которое вѣдь не что иное, какъ тотъ же земной шаръ большихъ размѣровъ? Спектральный анализъ открылъ однѣ и тѣ же составныя части въ томъ и другомъ изъ этихъ небесныхъ тѣлъ, слѣдовательно, нѣтъ причины предполагать ихъ различное происхожденіе. Можно съ полнымъ основаніемъ предположить, что при одинаковыхъ начальныхъ условіяхъ они имѣли бы въ настоящее время одну и ту же температуру и одинаковый физическій видъ, если бы огромные размѣры солнца не препятствовали бы охлажденію, столь грозно свирѣпствовавшему на землѣ и другихъ свѣтилахъ меньшихъ размѣровъ, чѣмъ солнце. Настоящая судьба нашего земного шара, образованіе коры и сопровождающая это корообразованіе растрата энергіи, будетъ слѣдовательно также и участью солнца согласно господствующимъ воззрѣніямъ въ современной наукѣ. Осуществленіе этого факта представляетъ собою поэтому, лишь вопросъ времени.

Теперешняя термодинамика въ соединеніи съ теоріей Лапласа, подтверждаетъ это заключеніе. Такъ какъ теплота и движеніе способны замѣщать одна другое, то почему нельзя было бы предположить, что солнечная температура произошла вслѣдствіе сгущенія первичной туманности, сжимавшейся подъ вліяніемъ всемірнаго тяготѣнія? Почему бы, если взглядъ Лапласа вѣренъ, механическая работа, происшедшая вслѣдствіе постепеннаго сближенія молекулъ, не могла бы обнаружиться подъ видомъ теплоты въ отвердѣвшемъ свѣтилѣ? Физики пытались вычислить количество теплоты, развившейся въ результатѣ этой гигантской работы. „Томсонъ показалъ, говоритъ Вольфъ, что сжатіе солнца, начиная съ безконечнаго объема до своей настоящей величины, потребовало 18 милліоновъ лѣтъ теплоты, т. е. въ 18 милліоновъ разъ больше той, которую это свѣтило излучаетъ въ годъ. Смотря по тому, будемъ ли мы считать, что солнце утрачивало въ предыдущіе вѣка большее или меньшее количество теплоты, сравнительно съ

тѣмъ, которое оно испускаетъ въ настоящее время, динамическая теорія опредѣлитъ возрастъ этого свѣтила числомъ лѣтъ бо́льшимъ или меньшимъ 18-ти милліоновъ" *).

Можно не соглашаться съ нѣкоторыми элементами этого вычисленія; можно говорить, напримѣръ, что въ первые періоды сжатія условія лучеиспусканія должны были быть совершенно иными, чѣмъ въ настоящее время; можно думать, что первоначальная температура матеріи была очень низка или весьма возвышенна, что объемъ туманности былъ громаденъ или относительно ограниченъ. Все это произведетъ измѣненіе въ величинѣ періода охлажденія, но ничуть не измѣнитъ сущности вещей. Сдѣланный изъ приведенной теоріи выводъ, что солнце получило опредѣленный запасъ энергіи, и что этой энергіи суждено черезъ нѣкоторое время истощиться,—остается не поколебленнымъ.

Геологи вообще находятъ періодъ указанный Томсономъ, черезчуръ короткимъ. Явленія, совершающіяся на поверхности земли, требуютъ, по ихъ мнѣнію, значительно болѣе долгаго промежутка времени. По самымъ умѣреннымъ вычисленіямъ образованіе земной коры требовало періода въ 20—25 милліоновъ лѣтъ **).

Эти согласныя между собою указанія, хотя и не представляютъ неопровержимаго доказательства, какимъ были бы непосредственныя и точныя измѣренія, тѣмъ не менѣе, сообщаютъ довольно высокую степень вѣроятности мнѣнію, по которому энергія нашей солнечной системы находится на пути постояннаго уменьшенія. Смѣлый и блестящій взглядъ Канта, который могъ быть привлекателенъ въ свое время, не можетъ, поэтому, быть раздѣляемъ серьезнымъ образомъ теперь, хотя нѣкоторые изъ новѣйшихъ писателей снова примкнули къ нему. Если бы различныя части солнечной системы и упали, дѣйствительно, когда-нибудь однѣ на другія, какъ это представлялъ себѣ великій нѣмецкій мыслитель, вслѣдствіе сопротивленія эѳирной среды или по какой-нибудь другой причинѣ, то онѣ были бы не въ состояніи съ помощью этого страшнаго столкновенія возро-

---

*) *Космогоническія гипотезы*, стр. 29.—Предположеніе объема туманности безконечнымъ, которое сдѣлалъ В. Томсонъ, не измѣняетъ чувствительнымъ образомъ цифръ, которыя получились бы если бы мы взяли объемъ, обладающій радіусомъ лишь въ восемь или въ десять разъ большимъ полудіаметра орбиты Нептуна.

**) См., именно, Руководство къ Геологіи Лаппарана—Traité de Géologie de M. Lapparent, стр. 1255.

дить первоначальную теплоту, существовавшую въ туманности, и доставить элементы для новаго процесса сгущенія, эквивалентнаго прежнему. Не только свѣтила сблизились бы между собою до взаимнаго соприкосновенія послѣ потери, вслѣдствіе тренія своего объ окружающую среду, значительной части ихъ живой силы, но даже ихъ тепловая или свѣтовая энергія были бы въ этотъ моментъ ослаблены въ значительной степени. Вслѣдствіе этихъ двухъ причинъ возродившаяся туманность обладала бы значительно меньшей температурой; новыя свѣтила двигались бы съ гораздо меньшей скоростью и амплитудой, сравнительно съ наблюдаемыми въ настоящее время.

Если отъ нашей солнечной системы мы перейдемъ къ различнымъ мірамъ, составляющимъ видимую вселенную, то мы придемъ къ аналогичнымъ заключеніямъ. Всѣ звѣзды должны были образоваться при условіяхъ мало отличающихся отъ тѣхъ, при которыхъ образовалось солнце. Обнаруженіе извѣстнаго числа одинаковыхъ составныхъ веществъ и нѣсколько другихъ сходныхъ чертъ заставляютъ астрономовъ предположить, что всѣ эти свѣтила произошли одинаковымъ образомъ, и что проходимыя ими фазы существованія смѣняются въ томъ самомъ порядкѣ. Конечно, звѣзды не всѣ достигли одной и той же степени охлажденія. Если бы даже онѣ образовались въ одно и то же время, то и тогда онѣ должны были двигаться на этомъ пути неравномѣрно. Самыя малыя изъ нихъ, получившія, вслѣдствіе сгущенія туманности, и соотвѣтственно меньшее количество теплоты, теряютъ ее скорѣе, кромѣ того, также вслѣдствіе ограниченности ихъ размѣровъ. Температуры различныхъ звѣздъ должны, слѣдовательно, представлять другъ съ другомъ въ настоящее время замѣтное различіе; но всѣ эти звѣзды произвели постепенную растрату теплоты.

Видъ неба, прибавляютъ астрономы, подтверждаетъ этотъ взглядъ. Въ самомъ дѣлѣ, свѣтила представляютъ намъ другъ съ другомъ различія въ блескѣ и цвѣтѣ, которыя оправдываютъ ихъ раздѣленіе на три категоріи:

1) Звѣзды, которыхъ цвѣтъ совершенно бѣлый, и которыя, повидимому, ничего не утратили изъ своего первоначальнаго блеска. Онѣ составляютъ около 60 процентовъ общаго числа звѣздъ.

2) Тѣ, цвѣтъ которыхъ начинаетъ желтѣть, и температура должна была уже понизиться. Число ихъ немного больше трети, а именно, 35 процентовъ общаго количества.

Наше солнце, какъ ни ослѣпителенъ его блескъ, принадлежитъ къ этой категоріи.

3) Наконецъ, тѣ, которыя вступили уже прямо въ періодъ потуханія, и которыхъ цвѣтъ сдѣлался красноватымъ. Ихъ насчитываютъ 5 процентовъ общаго числа. Къ этой группѣ принадлежитъ большее число звѣздъ, у которыхъ замѣчена особенная измѣнчивость свѣта, какъ будто онѣ достигли момента своего окончательнаго потуханія.

„Очевидно, говоритъ Фэй, эти три типа звѣздъ соотвѣтствуютъ фазамъ болѣе и болѣе близкимъ къ охлажденію. Водородъ свободенъ въ двухъ первыхъ категоріяхъ звѣздъ; въ третьей же онъ исчезаетъ, встрѣчаясь лишь въ извѣстныхъ соединеніяхъ“ *).

Куда же уходитъ энергія, исчезающая вслѣдствіе лучеиспусканія изъ видимой вселенной, какъ и изъ солнечной системы, и простое, совершенное исчезновеніе которой мы съ трудомъ можемъ себѣ представить? Исчезаетъ ли она совершенно въ глубинѣ пространства или же служитъ для поддержанія такихъ явленій, о которыхъ мы въ настоящее время не имѣемъ никакого представленія? Наука не въ состояніи отвѣтить на этотъ вопросъ, и до полученія болѣе подробныхъ свѣдѣній по этому предмету мы отмѣчаемъ, безъ комментарій, наблюдаемое уменьшеніе тепловой энергіи на поверхности звѣздъ.

Слѣдовательно, принципъ постоянства энергіи представляетъ собою понятіе скорѣе метафизическое, чѣмъ научное. Безпристрастное изученіе природы не доказываетъ его. Этотъ законъ не походитъ на законы равенства между дѣйствіемъ и противодѣйствіемъ или — независимости движеній. Послѣдніе вовсе не подчиняются времени и перемѣнамъ, происходящимъ во вселенной. Даже если бы нарушилась напряженность всѣхъ силъ, тогда ни откуда еще не слѣдовало бы, чтобы онѣ утратили въ какой-нибудь фазѣ своего разрушенія свойства быть въ точности противоположны другъ другу; равно какъ не измѣнился бы впредь способъ сложенія движеній. Но фактъ сохраненія энергіи не обладаетъ тѣмъ же характеромъ. Установленный относительно ограниченнаго историческаго періода, онъ утрачиваетъ постепенно свою точность по мѣрѣ того, какъ мы беремъ все большіе и большіе космогоническіе періоды. Въ дѣйстви-

---

*) Sur l'origine du monde, 2-e édition, page 201. См. также указанный уже трудъ Секки.

тельности энергія растрачивается, или вслѣдствіе сопротивленія эфирной среды, или же по причинѣ лучеиспусканія миріадъ свѣточей, озаряющихъ небесный сводъ. Вселенная подчиняется, такимъ образомъ, всеобщему закону: она живетъ, лишь поглощая силу и приближаясь къ окончательному истощенію. Такова, по крайней мѣрѣ, развязка, которую позволяетъ предвидѣть современная наука. За отсутствіемъ достовѣрности, которой, безъ сомнѣнія, ей никогда не удастся достигнуть, она во всякомъ случаѣ запрещаетъ утверждать противное.

Нельзя отрицать, что такое ниспроверженіе принципа, такъ хорошо соотвѣтствующаго нашимъ естественнымъ стремленіямъ, составляетъ предметъ разочарованія для нашего духа. Намъ нравится найти успокоеніе въ незыблемомъ и постоянномъ. Какъ только химики возвѣстили намъ о сохраненіи массы, какъ только они засвидѣтельствовали о ея способности оставаться несокрушимой при всѣхъ разрушительныхъ вліяніяхъ, мы испытали истинно философское удовлетвореніе. По той же самой причинѣ мы поспѣшили отмѣтить великіе законы движенія, обладающіе характеромъ вѣчности, а также законъ всемірнаго тяготѣнія, на который время, повидимому, также не кладетъ слѣда. Намъ равнымъ образомъ хотѣлось бы считать и вселенную громаднымъ резервуаромъ силъ, гдѣ все поглощается и возникаетъ вновь, и гдѣ неопредѣленно долго сохраняется способность бытія. Но новѣйшія открытія въ этой области заставляютъ насъ быть настороже противъ такого мнѣнія и требуютъ большой осторожности. Энергія не увеличивается: въ этомъ направленіи она дѣйствительно не измѣняется; но она, можетъ быть, уменьшается и сопровождаетъ время въ его непреодолимомъ теченіи.

ГЛАВА VIII.

О постоянствѣ законовъ природы.

Предыдущая глава вызываетъ законный вопросъ о „постоянствѣ законовъ природы“. Можно ли говорить о постоянствѣ въ томъ случаѣ, когда замѣчаешь или подозрѣваешь во вселенной столь большія перемѣны? А если за-

коны не постоянны, то во что превращается самая идея о законѣ? Не слѣдуетъ ли оставить эту ходячую фразу о неизмѣнности законовъ природы? Или, если ее можно сохранить, то въ какомъ смыслѣ?

Вообще никто не сомнѣвается, что природа подчинена законамъ. Явленія происходятъ не случайно, не по чьему-либо капризу, принимая перемѣнныя и скоропреходящія формы. Они слѣдуютъ постояннымъ правиламъ и, при одинаковыхъ условіяхъ, развиваются въ томъ же самомъ порядкѣ, съ той же развязкой. Пусть тѣло падаетъ сегодня съ извѣстной высоты, завтра оно не упадетъ съ той же высоты инымъ образомъ. Вода закипаетъ при извѣстной температурѣ; эта температура не измѣнится при слѣдующихъ опытахъ. Сжатый атмосферный воздухъ развиваетъ извѣстную упругую силу при данномъ уменьшеніи его объема; для одинаковой степени уменьшенія объема сила упругости будетъ та же самая, если прочія условія остаются постоянными.

Вѣрованіе въ существованіе законовъ или, по крайней мѣрѣ, нѣкоторыхъ изъ нихъ, такъ же древне какъ человѣчество. Но оно не всегда обладало той степенью ясности и тѣмъ характеромъ общности, которые замѣчаются у нея въ настоящее время. Въ первобытныя эпохи невѣжественныя массы, а часто даже и развитые умы придавали большое значеніе элементу неожиданности и произвола въ физическихъ явленіяхъ. Отсюда произошло учрежденіе божествъ или геніевъ, по волѣ которыхъ или по капризу происходили факты самые крупные и, повидимому, выходящіе изъ ряда обыкновеннаго порядка физическихъ явленій. То же самое мы встрѣчаемъ и въ наше время у дикихъ народовъ. Но въ цивилизованномъ обществѣ подобныя уклоненія отъ правильнаго сужденія очень рѣдки. Даже въ томъ случаѣ, когда объясненіе явленіямъ не находится, даже тогда, когда явленія облекаются въ странныя формы и, повидимому противорѣчатъ усвоеннымъ истинамъ, научные умы никогда не бываютъ склонны видѣть въ нихъ дѣйствительное отступленіе отъ установленныхъ законовъ. Они предполагаютъ, что или наблюденіе было несовершенно, или неизвѣстныя еще, хотя и совершенно правильныя причины произвели кажущуюся аномалію.

Это послѣднее обстоятельство, участіе неизвѣстныхъ причинъ вмѣстѣ съ причинами извѣстными въ дѣлѣ вызыванія явленія, весьма часто замедляетъ точное опредѣленіе

законовъ и противодѣйствуетъ выраженію ихъ въ видѣ строго математической формулы, потому что явленія никогда не представляются нашему изслѣдованію происходящими отъ единственной причины и въ свою очередь производящими одно только дѣйствіе. Почти всегда они происходятъ вслѣдствіе дѣйствія многихъ причинъ и въ свою очередь производятъ различные результаты. Передъ нами не отдѣльные линейные и легко различимые ряды, подобные тѣмъ цѣпямъ, гдѣ каждое звено соединяется исключительно со своимъ предыдущимъ и послѣдующимъ. Но ряды перекрещиваются между собою; каждое звено соединяется заразъ съ нѣсколькими другими и становится, такимъ образомъ, центромъ сходимости и фокусомъ лучеиспусканія многочисленныхъ дѣйствій. Сцѣпленіе, произведенное одной только причиной, поэтому, трудно было бы выслѣдить и опредѣлить. Ея дѣйствіе возмущается или маскируется причудливыми смѣшеніями, которыя можно назвать *интерференціями*. Внутренняя сила, развиваемая сжатіемъ газа, зависитъ не отъ одного лишь уменьшенія объема, а и отъ температуры. А эта послѣдняя, въ свою очередь, зависитъ не исключительно отъ количества теплоты, сообщенной газу, но измѣняется, смотря по тому, насколько послѣдній близокъ къ своей точкѣ сжиженія. Такимъ образомъ нѣсколько законовъ участвуютъ въ опредѣленіи наблюдаемаго явленія и своими соединенными дѣйствіями скрываютъ взаимно каждый свою формулу дѣйствія. Поэтому-то и бываетъ часто весьма трудно получить истинное выраженіе спеціальнаго закона, дѣйствіе котораго изучается. Означенная трудность удваивается, когда нѣкоторыя совмѣстно дѣйствующія причины не только плохо опредѣлены, но и когда, какъ я уже сказалъ, неизвѣстно самое ихъ существованіе. Въ такихъ случаяхъ у физика могло бы легко явиться желаніе отказаться отъ рѣшенія задачи, если бы его не поддерживало въ его изслѣдованіяхъ твердое убѣжденіе, что на свѣтѣ нѣтъ ничего случайнаго, и что кажущіяся аномаліи зависятъ отъ нашего недостатка знанія.

Для произведенія кажущагося смѣшенія и неправильности, не всегда необходимо, чтобы двѣ различныхъ причины переплетались другъ съ другомъ. Достаточно, чтобы одна изъ нихъ дѣйствовала одновременно на нѣсколько тѣлъ, и чтобы эти послѣднія, въ силу того же самаго закона, воздѣйствовали одни на другія. Движеніе планеты вокругъ

солнца представляетъ собою одну изъ самыхъ легкихъ задачъ; всякій школьникъ рѣшитъ ее, шутя, если бы оба небесныя тѣла были изолированы въ пространствѣ. Но лишь только является дѣйствіе третьяго тѣла согласно тому же самому закону притяженія, вопросъ тотчасъ же усложняется до такой степени, что превосходитъ даже средства математическаго анализа. И наоборотъ, нарушенія простой формулы могутъ указывать не на поправку, въ которой нуждается предполагаемый законъ, а на присутствіе какого-нибудь тѣла, остававшагося до сихъ поръ незамѣченнымъ. Такимъ, именно, образомъ Леверье былъ приведенъ къ своему знаменитому открытію и могъ заранѣе, путемъ вычисленія, указать мѣсто планеты Нептунъ. Этихъ фактовъ не было бы въ исторіи наукъ, если бы вѣрованіе въ непреложность законовъ не укоренилось въ сознаніи геометровъ и физиковъ.

Какимъ образомъ это вѣрованіе примиряется съ фактами, указанными въ предыдущей главѣ, и знакомство съ которыми считается, по справедливости, одной изъ великихъ побѣдъ современной науки? Какимъ образомъ, съ одной стороны, мы считаемъ неизмѣнными законы природы, а съ другой—признаемъ возможность уменьшенія энергіи во вселенной?

Въ области физическихъ явленій *причина* служитъ явленіемъ высшаго порядка, надъ которымъ мы или не умѣемъ, или не хотимъ подняться. Движенія небесныхъ тѣлъ опредѣляются тяготѣніемъ. Но чѣмъ производится тяготѣніе? Мы этого не знаемъ, а потому принимаемъ его за причину. Желѣзно-дорожный поѣздъ тянется паровой машиной. Горѣніе угля служитъ непосредственной причиной произведенной машиной работы. Далѣе этого мы не идемъ, хотя мы и имѣли къ этому возможность, и мы устанавливаемъ отношеніе между горѣніемъ угля и перевозимымъ грузомъ. Мы считаемъ безполезнымъ, съ промышленной точки зрѣнія, изслѣдовать—какимъ образомъ образовался каменный уголь во время геологическихъ періодовъ. Короче сказать, наши наблюденія относятся только къ явленіямъ послѣдовательнымъ; мы никогда не восходимъ къ причинѣ, какъ ее понимаютъ метафизики, т. е. къ первому звену цѣпи, предполагая, что у цѣпи есть первое звено. Мы останавливаемся на промежуточной ступени, указанной состояніемъ нашего знанія или потребностью нашего духа, и здѣсь, именно, помѣщаемъ начало общей связи нашихъ зна-

нiй, или *относительную* причину явленiй, рядъ которыхъ мы изучили.

Когда говорятъ о постоянствѣ законовъ, то что имѣютъ въ виду—самыя ли эти послѣдовательныя явленiя, или высшее явленiе, отъ котораго они происходятъ? Разумѣютъ ли подъ этимъ постоянство правилъ, связывающихъ каждое явленiе со слѣдующимъ, или же неизмѣнность высшаго явленiя? Вотъ, напримѣръ, тѣло, которое падаетъ съ извѣстной высоты на поверхность земли. Оно прiобрѣтаетъ скорость въ зависимости отъ высоты паденiя, и пройденныя имъ пространства пропорцiональны квадратамъ временъ прохожденiя. Здѣсь слѣдуетъ различать двѣ вещи: напряженiе тяжести и законъ ея дѣйствiя. Если бы это напряженiе сдѣлалось когда-нибудь слабѣе, прiобрѣтенная скорость въ концѣ паденiя была бы тогда меньше, а употребленное на прохожденiе время—длиннѣе. Пропорцiональность же пройденныхъ пространствъ квадратамъ временъ, являющаяся истиннымъ закономъ паденiя тѣлъ, сохранится всегда. Солнечный свѣтъ передается со скоростью 300.000 километровъ въ секунду, а его напряженiе, оцѣниваемое въ точкахъ, находящихся на различныхъ разстоянiяхъ отъ источника свѣта, уменьшается пропорцiонально квадратамъ разстоянiй. Если по прошествiи вѣковъ, солнечный блескъ уменьшится, какъ то предвидятъ астрономы, напряженность свѣта полученнаго въ данной точкѣ уменьшится пропорцiонально, законъ же передачи не будетъ нарушенъ. Скорость все-таки останется равной 300.000 километровъ въ секунду, а уменьшенiе свѣта въ отношенiи обратномъ квадратамъ разстоянiй. Ученые грядущихъ эпохъ, записывая эти измѣненiя, будутъ вправѣ сказать, что причина или высшее явленiе измѣнилось, но не скажутъ, конечно, что законы природы сдѣлались другими.

Существуетъ много фактовъ, которые можно разсматривать подобнымъ же образомъ. Предположимъ, что съ теченiемъ времени дѣйствiя, о которыхъ мы уже упоминали (тренiе приливовъ, электрическiя индукцiи и т. д.) произведутъ замедленiе во вращенiи земного шара. Это замедленiе замѣтно увеличитъ дѣйствiе тяжести, которое представляетъ собою разность между дѣйствительной тяжестью и центробѣжной силой. Тѣла будутъ падать, слѣдовательно, скорѣе или употребятъ меньшее число секундъ (теперешнихъ), чтобы достигнуть конца ихъ паденiя *). Между тѣмъ за-

*) Уменьшенiе числа секундъ будетъ вдвойнѣ замѣтно,

конъ паденія тяжелыхъ тѣлъ не измѣнится и если бы удалось сдѣлать точную поправку, зависящую отъ уменьшенія центробѣжной силы, то были бы найдены тождественно тѣ же самыя величины. Предположимъ также, что сопротивленіе эфирной или метеорической среды производитъ перемѣну въ земной орбитѣ. Угловая скорость движенія земли вокругъ солнца увеличится, а радіусъ въ то же время уменьшится. Приближаясь къ солнцу, земля получитъ большее количество теплоты, и смотря по тому, будетъ ли это увеличеніе больше или меньше ослабленія солнечнаго лучеиспусканія, она нагрѣется или охладится. Каковъ бы ни былъ смыслъ явленія, множество другихъ послѣдовательныхъ явленій испытаютъ на себѣ вліяніе происшедшихъ въ немъ перемѣнъ. Если земля охладится, то пониженіе барометрическаго столба съ высотой будетъ быстрѣе, и сопротивленіе движенію тѣлъ брошеныхъ съ поверхности земли сдѣлается больше вслѣдствіе большей плотности слоевъ атмосферы, черезъ которые имъ придется проходить. Но было бы неточно утверждать что измѣнились законы этихъ явленій. Барометрическій столбъ всетаки будетъ давать показаніе вѣса слоевъ воздуха, и сопротивленіе движущагося тѣла останется всегда той же самой функціей скорости и плотности среды.

Наконецъ, когда мы разсматриваемъ растрату міровой энергіи вслѣдствіе лучеиспусканія, то замѣчаемъ, что даже этотъ великій переворотъ совершается по извѣстнымъ неспособнымъ измѣняться законамъ Охлажденіе небесныхъ очаговъ въ каждую единицу времени не перестанетъ быть функціей температуры; оно будетъ зависѣть въ той же степени отъ рода матеріаловъ составляющихъ поверхность свѣтила, отъ ихъ способности лучеиспусканія, отъ внутренней теплопроводимости. Человѣкъ, достаточно проницательный, чтобы впередъ различить всѣ эти частности, могъ бы съ точно такой же увѣренностью предсказать постепенное пониженіе температуры свѣтила, какъ и пониженія температуры металлическаго однороднаго шара, подвѣшаннаго въ его лабораторіи. Однимъ словомъ, самыя перемѣны подчиняются неизмѣннымъ законамъ. Что ускользаетъ отъ насъ, это, имен-

---

ибо когда вращеніе земного шара замедляется, продолжительность звѣздныхъ сутокъ увеличится, а вслѣдствіе этого существенная величина новой секунды сдѣлается больше. Слѣдовательно, необходимо меньшее число секундъ для паденія, несмотря на то, что абсолютная продолжительность послѣдняго и не уменьшилась.

но, знакомство съ высшимъ фактомъ, отъ котораго происходятъ всѣ другія измѣненія. Мы не проникаемъ до того источника, который даетъ начало первому импульсу и мы не знаемъ незыблемаго правила, по которому этотъ импульсъ измѣняется въ зависимости отъ времени. Но существованіе правила несомнѣнно, и мы вполнѣ отдаемъ себѣ отчетъ въ томъ, что даже въ этихъ недоступныхъ для насъ пространствахъ, ничто не совершается произвольно или случайно.

Такимъ образомъ, постоянство законовъ природы должно быть понимаемо слѣдующимъ образомъ:

Съ одной стороны, оно обнаруживается въ сцѣпленіи послѣдовательныхъ явленій, происходящихъ несмотря на измѣненія причинъ относительно первообразныхъ, по такимъ правиламъ и въ такихъ формахъ, которыя можно, повидимому, считать вѣчными; и съ другой стороны, оно проявляется въ измѣненіи этихъ самыхъ причинъ, совершающемся въ свою очередь по постояннымъ правиламъ; формула этого измѣненія первичныхъ причинъ, если бы мы могли ее найти, оказалась бы точно также независимой отъ времени и отъ наблюдаемыхъ перемѣнъ.

Но необходимы ли эти постоянные законы? Могли ли бы они существовать въ другомъ видѣ, чѣмъ теперь? Не способны ли они были въ нѣкоторый данный моментъ уступить свое мѣсто другимъ законамъ?

Я думаю, что никто не придастъ физическимъ законамъ того же самаго значенія, какъ законамъ геометрическимъ. Никто не скажетъ, чтобы отношеніе между силой и массой было одного порядка съ отношеніемъ между окружностью и радіусомъ круга. Это послѣднее чуждо матеріальнымъ реальностямъ. Мы не можемъ вообразить себѣ его другимъ, не рискуя нарушить основные законы нашего разума и уничтожить всѣ логическія правила. Но какимъ образомъ могли бы тѣ или другія пострадать отъ того, что сила сообщала бы массѣ скорость, различную отъ той, которую мы замѣчаемъ въ настоящее время? Какого рода смущеніе могъ бы испытать нашъ разумъ, если бы сила, равная одному килограмму, дѣйствуя на массу въ одинъ литръ воды, заставляла его пробѣгать въ секунду разстояніе большее или меньшее, чѣмъ $4\frac{9}{10}$ сорокамилліонныхъ долей четверти земного меридіана, проходящаго черезъ Парижъ? Это число 4,9 не заключаетъ ничего необходимаго въ самомъ себѣ; оно могло точно также быть 5, или $4^1/_2$, или всякимъ другимъ

числомъ. Если оно и требуется природой вещей, то мы не видимъ для этого раціональной связи. Значеніе этого отношенія остается въ нашихъ глазахъ случайнымъ. То же самое я скажу и о различныхъ законахъ физики и химіи. Какое логическое препятствіе можетъ быть для того, чтобы теплоемкость желѣза менѣе различалась отъ теплоемкости воды, и чтобы атомы сѣры соединялись въ большемъ числѣ съ атомами кислорода? Безъ сомнѣнія, всѣ эти факты суть слѣдствія установившагося общаго порядка; но мы легко представляемъ себѣ, что этотъ порядокъ могъ бы существовать и при другихъ числахъ съ соотвѣтствующимъ измѣненіемъ въ явленіяхъ. Короче, законы природы въ нашемъ представленіи не имѣютъ того же характера, какъ математическіе законы, въ которыхъ мы не въ состояніи вообразить себѣ ни малѣйшаго измѣненія.

Но эти законы, случайные по своему происхожденію, являющіеся въ настоящее время такими, какими мы ихъ наблюдаемъ, могутъ ли подвергаться измѣненіямъ? Могутъ ли ихъ форма или просто ихъ коэффиціенты получить другое выраженіе? Разумъ нашъ совершенно отвергаетъ это. Какимъ образомъ, въ самомъ дѣлѣ, настоящій порядокъ, совокупность существующихъ вещей могли бы измѣниться въ какомъ-нибудь отношеніи безъ введенія фактора, чуждаго этой вселенной, который принесъ бы съ собою то, чего ему недостаетъ, для произведенія предполагаемаго измѣненія? Если вселенная, какъ полагаютъ, въ настоящее время стремится какъ бы по наклонной плоскости, ведущей ее къ упадку жизнедѣятельности, то что можетъ остановить ее на этомъ пути, или заставить подняться? Откуда появится сила, которая послужитъ препятствіемъ къ растратѣ энергіи, или которая вознаградитъ потери? Если этой силы нѣтъ и она не вошла въ общій планъ природы, то откуда же она могла бы явиться? Гдѣ ея причина, лежащая внѣ самой природы? Здѣсь мы вступаемъ въ область чуждую физики, гдѣ всякія умозрѣнія были бы праздными. Мы имѣемъ только право заявить, что вселенная, при своемъ настоящемъ строеніи, не могла бы, безъ противорѣчія въ нашихъ взглядахъ, заключать въ себѣ причину, способную измѣнить ее самое и, слѣдовательно, заставить измѣниться ея законы. Эта причина могла бы явиться только извнѣ, при условіяхъ, относительно которыхъ космогонія некомпетентна.

Законы, извѣстные намъ, не всѣ имѣютъ въ нашихъ глазахъ одинаковое значеніе. Мы ихъ классифицируемъ весьма

различно, смотря по тому, можемъ ли выразить ихъ математически, или не въ состояніи открыть никакой достаточно точной формулы для ихъ выраженія. Превосходство и несравненная величественность закона Ньютона объясняется не только его всеобщностью, но еще болѣе, пожалуй, его совершенной точностью и удивительной простотой. Но такой примѣръ, къ сожалѣнію, исключителенъ. Особенно въ органическомъ царствѣ мы обыкновенно неспособны выразить математическую форму явленій и большей частью бываемъ приведены къ довольно неопредѣленнымъ выраженіямъ, вовсе не позволяющимъ перейти къ истиннымъ уравненіямъ, и которыя отмѣчають только существованіе отношеній подмѣченныхъ нами сквозь лабиринтъ наблюденій. Мы чувствуемъ, не будучи въ состояніи ее опредѣлить, присутствіе естественной и постоянной связи, которая должна обезпечить постоянство и правильность смѣны наблюдаемыхъ нами фактовъ. Въ неорганическомъ царствѣ намъ удается лучше овладѣть предметомъ, но задача, которую остается выполнить, все-таки, громадна. Число законовъ, чисто эмпирическихъ, или неподчиняющихся до сихъ поръ строгимъ формуламъ, составляетъ еще громадное большинство..

Цѣль науки заключается именно въ приведеніи этихъ приближенныхъ законовъ къ степени точности, которая давала бы возможность выразить ихъ алгебраическимъ уравненіемъ. Астрономія, теорія теплоты, теорія свѣта, акустика и другія вѣтви науки, сдѣлались, благодаря накопленію работы нѣсколькихъ поколѣній, настоящими прикладными математическими науками; часто даже онѣ обогащали теоретическую математику новыми способами вычисленія, необходимость которыхъ имъ пришлось доказать.

Этотъ процессъ медленнаго вырабатыванія, направленный на постоянное преобразованіе нашихъ знаній изъ состоянія эмпирическаго въ точное или раціональное состояніе, встрѣчаетъ главную трудность для себя во взаимномъ перекрещиваніи рядовъ явленій или въ сложности наблюдаемыхъ фактовъ. Къ счастію, опытъ позволяетъ намъ обнаружить слѣдующій общій и надежный фактъ: чѣмъ лучше можетъ быть изолирована причина, тѣмъ проще ея законъ. Связь явленій, происходящихъ вслѣдствіе одной только причины, когда удалось ихъ освободить отъ побочныхъ обстоятельствъ, даетъ форму, удобную для математическаго выраженія. Сложныя выраженія, состоя-

щія изъ болѣе или менѣе приближенныхъ членовъ, служатъ почти всегда признакомъ комбинацій, скрещиванія различныхъ причинъ. Законъ тяготѣнія нарушается лишь при весьма небольшихъ разстояніяхъ, гдѣ его собственное дѣйствіе, вѣроятно, измѣнилось вслѣдствіе вліянія силъ другого рода. Поэтому-то и предполагаютъ вообще существованіе на этихъ разстояніяхъ интерференціи между молекулярными дѣйствіями и тяготѣніемъ, желая, такимъ образомъ, удержать за ньютоновымъ закономъ его грандіозную простоту.

Древній міръ сказалъ устами Пиѳагора: „Числа управляютъ міромъ". То, что тогда могло казаться мистическимъ воззрѣніемъ, пріобрѣло болѣе точное значеніе со времени открытій новѣйшей науки Наши алгориѳмы и комбинаціи ихъ, т. е., математическій языкъ, въ томъ видѣ, какъ онъ былъ созданъ людьми, примѣняется превосходно къ выраженію дѣйствій природы. Между внѣшнимъ міромъ и нашимъ разумомъ обнаруживается особаго рода соотвѣтствіе, не зависящее отъ нашего творчества. Потому что важнѣйшіе изъ этихъ алгориѳмовъ и ихъ отвлеченное примѣненіе были открыты геометрами гораздо раньше, чѣмъ физики и астрономы воспользовались ими для примѣненія къ изслѣдованію явленій матеріальнаго міра. Формулы, выведенныя съ цѣлью служить теоретическимъ умозрѣніямъ, оказались потомъ въ точномъ согласіи съ естественными явленіями и сдѣлались лучшими ихъ выразителями. Не легко было предвидѣть этотъ результатъ. Кто бы могъ подозрѣвать, что законъ, признающій пропорціональность сферическихъ поверхностей квадратамъ ихъ радіусовъ, сдѣлается нѣкогда также закономъ уменьшенія силы всемірнаго тяготѣнія, а также и другихъ излучивающихся силъ? Кто бы могъ вообразить, что геометрическій синусъ будетъ играть роль въ опредѣленіи показателя преломленія свѣта, и что уравненіе равносторонней гиперболы выразитъ законъ сжатія совершенныхъ газовъ. Кто предположилъ бы, закладывая основанія ариѳметики, что рядъ нечетныхъ чиселъ представитъ собою пространства, пройденныя свободно падающимъ тѣломъ въ пустотѣ, впродолженіе слѣдующихъ одинъ за другимъ періодовъ его паденія?

Извѣстны тѣ прекрасныя умозрительныя изслѣдованія относительно коническихъ сѣченій, которыми занимались греческіе геометры. Аполлоній Пергамскій стяжалъ себѣ безсмертную славу, показавъ свойства этихъ кривыхъ, представляемыя

себѣ самымъ отвлеченнымъ образомъ, потому что они вытекали изъ пересѣченія конуса плоскостью, различнымъ образомъ наклонною къ оси конуса. Въ это время истинные законы астрономіи были неизвѣстны и продолжали еще долго оставаться скрытыми отъ человѣчества. Свѣтиламъ приписывалось круговое движеніе, какъ казавшееся „совершеннѣйшимъ изъ всѣхъ". Нѣсколько вѣковъ спустя, геніальный наблюдатель, оставитъ свои кабинетныя размышленія и отдавшись внимательному изученію явленій на небесномъ сводѣ, утверждаетъ, послѣ терпѣливыхъ изслѣдованій, что траекторія каждой планеты вокругъ солнца представляетъ именно одно изъ этихъ знаменитыхъ коническихъ сѣченій, изученіе которыхъ такъ сильно занимало древнихъ философовъ. Кривыя Аполлонія сдѣлались законами Кеплера. Ньютонъ, въ свою очередь, доказываетъ, что сила, способная заставить планету описать подобную кривую, должна быть направлена къ солнцу, а ея напряженіе измѣняется по образцу измѣненія сферическихъ поверхностей съ величиною радіуса, представляющаго собою разстояніе отъ солнца. Такимъ образомъ, понятія, зародившіяся въ умахъ греческихъ геометровъ подъ вліяніемъ цѣлей, совершенно чуждыхъ явленіямъ природы, появились въ нѣкоторый данный моментъ, какъ бы осуществленными этой послѣдней, съ такой точностью, которая не оставляетъ сомнѣнія относительно способа проявленія главной силы природы.

Трудно видѣть въ этихъ фактахъ простое совпаденіе и приписывать случайности столь многочисленные случаи соотвѣтствія между явленіями двухъ различныхъ порядковъ. Съ своей стороны, я нахожу въ нихъ подтвержденіе мнѣнія, уже высказаннаго мною въ главѣ о вычисленіи безконечно малыхъ. Человѣческій умъ и природа входятъ въ общій планъ, по которому первый удивительно приспособленъ для пониманія второй. До какихъ предѣловъ доходитъ это взаимное приспособленіе? Въ какихъ границахъ знакомитъ оно насъ съ внѣшнимъ міромъ? Отнюдь не слѣдуетъ преувеличивать сближеній и заключать, что человѣкъ обладаетъ въ себѣ самомъ средствами угадать отвѣтъ на этотъ вопросъ. Я не согласенъ съ такой претензіей. Человѣкъ способенъ создавать формы, въ которыя войдутъ потомъ законы нѣкоторыхъ явленій. Но онъ не знаетъ этихъ законовъ и не можетъ утверждать ихъ согласіе съ построенными имъ типами до тѣхъ поръ, пока наблюденія не откроютъ ему этого. Онъ открылъ коническія сѣченія, но не

зналъ, что они служатъ образцами планетныхъ движеній, прежде чѣмъ не изучилъ эти послѣднія непосредственно. Онъ могъ подозрѣвать, что „числа управляютъ міромъ", но онъ не знаетъ этихъ чиселъ, если не ищетъ ихъ внимательно въ природѣ. Человѣкъ извлекаетъ пользу изъ своей чудной способности воспринимать физическія истины, но онъ впалъ бы въ самое грубое заблужденіе, если бы, возвращаясь къ старымъ привычкамъ, слѣпо довѣрился такъ называемымъ числовымъ гармоніямъ для того, чтобы утверждать существованіе нѣкоторыхъ тѣлъ или чтобы приписывать имъ опредѣленныя свойства. Въ этомъ отношеніи цѣлая пропасть отдѣляетъ открытіе Леверье, опирающееся на формальное доказательство астрономическихъ пертурбацій, отъ попытки Кеплера отыскать въ симметріи чиселъ основаніе соотвѣтственныхъ разстояній планетъ отъ солнца. Такого рода индукціи иногда и оправдываются явленіями; но въ тѣхъ случаяхъ, когда онѣ не являются результатами наблюденія, ихъ слѣдуетъ считать лишь счастливыми исключеніями, видъ которыхъ скорѣе обольщаетъ умъ, чѣмъ руководитъ имъ.

ПРИМѢЧАНІЯ.

ПРИМѢЧАНІЕ I.

О реальности пространства и времени.

Я не имѣю намѣренія предпринимать изслѣдованіе, принадлежащее къ области метафизики. Я просто излагаю мои мысли относительно пространства и времени. Инстинктивно я всегда вѣрилъ въ ихъ реальность, будучи не въ состояніи доказать ихъ иначе, какъ невозможностью для меня думать по другому, особенно насчетъ того, что касается времени. Противорѣчащіе мнѣ аргументы никогда меня не убѣждали, и я желаю объяснить мой взглядъ.

Извѣстно классическое возраженіе противъ реальности пространства и времени: „Если бы они существовали внѣ насъ“, говорятъ, „то представляли бы собою необходимымъ образомъ субстанціи, или атрибуты; но мы не можемъ ихъ себѣ представить ни въ одномъ изъ этихъ состояній“. Это, повидимому, вѣрно, а между тѣмъ я задаю себѣ вопросъ: почему бы пространству и времени не быть субстанціями? Что такое, въ сущности, субстанція? Слѣдовало бы предварительно опредѣлить этотъ терминъ и показать, затѣмъ, что пространство и время не могутъ принадлежать къ этой категоріи. Но опредѣленіе субстанціи никогда не отличалось большой ясностью и сдѣлалось еще менѣе яснымъ со времени открытій современной науки. Можно ли, напримѣръ, назвать *субстанціей* тотъ таинственный агентъ, къ которому прибѣгаютъ физики для объясненія явленій теплоты и свѣта? Этотъ агентъ, эта среда, этотъ механизмъ — назовите его, какъ угодно—существуетъ, однако, такъ какъ проявляется въ неопровержимыхъ дѣйствіяхъ. Кромѣ того, онъ лишенъ

тѣхъ качествъ, безъ которыхъ трудно представить себѣ субстанцію. Онъ не имѣетъ вѣса, у него, можетъ быть, нѣтъ и массы; онъ не производитъ непосредственнаго впечатлѣнія ни на одинъ изъ нашихъ органовъ чувствъ; однимъ словомъ, у него нѣтъ ни одного признака, который указывалъ бы на то, что нѣкогда называли „матеріальнымъ". Съ другой стороны, это — не духъ, по крайней мѣрѣ, никому не приходило въ голову называть его такимъ образомъ. Но неужели потому только, что его нельзя подвести подъ категорію субстанціи, слѣдуетъ отрицать его реальность?

Можно, ли также отрицать и по той же самой причинѣ, реальность того механизма, благодаря которому тяготѣніе передается въ глубину пространства со скоростью несравненно большей скорости свѣта, и которую Лапласъ считалъ мгновенной? Великій Ньютонъ полагалъ невозможнымъ обойтись безъ этого агента. Тотъ, кому принадлежитъ открытіе всемірнаго тяготѣнія, писалъ Бентлею:... „Чтобы тяготѣніе было прирожденно, присуще и свойственно матеріи въ томъ смыслѣ, что одно тѣло могло бы дѣйствовать на другое на разстояніи, чрезъ *пустое пространство*, безъ посредства чего либо, при помощи чего и сквозь что могли бы передаваться дѣйствіе и сила отъ одного тѣла другому, мнѣ кажется такимъ абсурдомъ, что я думаю, ни одинъ человѣкъ, способный философски разсуждать, не впадетъ въ него. Тяготѣніе должно производиться агентомъ, обнаруживающимъ свое непрерывное вліяніе на тѣла по извѣстнымъ законамъ; но матеріаленъ этотъ агентъ или нематеріаленъ? Этотъ вопросъ я предоставляю оцѣнкѣ моихъ читателей" *).

Затрудненіе отвести мѣсто этимъ агентамъ такъ велико, что нѣкоторые физики, и именно, Гирнъ, мастерски развившій эту мысль въ своей книгѣ „*Строеніе небеснаго пространства*", считаютъ возможнымъ вообразить себѣ новый родъ агентовъ, занимающихъ, такъ сказать, средину между матеріальнымъ порядкомъ и духовнымъ, и служащихъ великимъ источникомъ силъ природы. Этотъ классъ агентовъ, названный Гирномъ *динамическимъ*, изъ представленія о которомъ онъ исключаетъ всякую идею массы и вѣса, служитъ какъ бы для установленія отношеній, для

*) 3-е письмо къ Бентлею отъ 25 февраля 1692 г. приведено Гирномъ въ его книгѣ: Constitution de l'espace céleste, 1889).

вызыванія дѣйствій на разстояніи между различными частями матеріи.

Вотъ какъ удалились мы отъ субстанціи въ томъ смыслѣ, какъ ее понимали древніе, и мы тщетно искали бы *субстрата*, соотвѣтствовавшаго этому слову въ ихъ употребленіи. Поэтому, не осторожнѣе ли было бы думать вмѣстѣ съ Курно, что традиціонныя категоріи субстанцій, атрибутовъ и отношеній, по всей вѣроятности, не полны, и что безъ сомнѣнія, есть вещи, ускользающія отъ подобной классификаціи? Къ этой послѣдней категоріи принадлежатъ въ такомъ случаѣ время и пространство; это, вѣроятно, реальности sui generis, подобныя эѳиру физиковъ, посредничествующему агенту Ньютона, динамической средѣ Гирна, къ которымъ древнія, слишкомъ узкія формы сужденія не въ состояніи приспособиться. Пространство и время отличаются даже между этими сверхчувственными реальностями, потому что они общнѣе всѣхъ, распространеннѣе и понятнѣе, а также вслѣдствіе того, что вызываютъ меньше всего колебанія въ человѣческомъ умѣ.

Иммануилъ Кантъ далъ новую форму возраженію, которая должна была обратить и, дѣйствительно, обратила на себя большое вниманіе, потому что она относится къ теоріи, отличающейся особенной силой. Въ своемъ разсужденіи объ „антиноміяхъ чистаго разума" знаменитый философъ старается доказать, что если бы пространство и время существовали внѣ насъ, если бы они не были просто формами нашего воспріятія, то изъ этого вытекали бы два, одинаково неразрѣшимыхъ противорѣчія, а именно: 1) невозможность представить себѣ міръ ни безконечнымъ, ни ограниченнымъ въ пространствѣ; 2) точно такая же невозможность вообразить себѣ, чтобы міръ имѣлъ когда-нибудь начало во времени, или что онъ его не имѣлъ вовсе *).

Неужели эта двойная антиномія столь непоправима, какъ думалъ И. Кантъ въ то время, когда физическія науки были еще далеки отъ своего теперешняго развитія?

Безконечность пространства, это — одно, а безконечность

---

*) Заключеніе Канта съ большой ясностью выражено въ слѣдующемъ примѣчаніи къ его книгѣ „*Критика чистаго разума*":

„Пространство есть простая форма наружнаго созерцанія (формальнаго созерцанія), а не реальный предметъ, который можно было бы наблюдать внѣшнимъ образомъ. Пространство прежде всѣхъ предметовъ, которые его опредѣляютъ (наполняютъ его или очерчиваютъ) или, скорѣе, которые производятъ *эмпирическое созер-*

матеріи—другое. Я думаю, что безконечность пространства отнюдь не противорѣчитъ ограниченности матеріальной вселенной. Первое представленіе имѣетъ, на самомъ дѣлѣ или повидимому, характеръ необходимости; второе же является вопросомъ о фактѣ, который мы не въ состояніи рѣшить, и споръ относительно него остается открытымъ. Представленіе о безконечности вселенной тѣмъ менѣе кажется намъ необходимымъ, что указанія, доставляемыя наблюденіемъ, скорѣе даютъ право заключить о ея фактической предѣльности.

Кромѣ того, если бы даже антиномія и была не разрѣшима, то и въ такомъ случаѣ она, по моему мнѣнію, не могла бы служить достаточнымъ поводомъ для того, чтобы отбросить одинъ изъ двухъ терминовъ, считаемыхъ несогласимыми между собою. Именно во имя подобнаго же принципа нѣкоторыя школы пришли къ отрицанію свободы воли человѣка, вслѣдствіе того, что не могли согласить ее съ предопредѣленіемъ или, наоборотъ, отрицали предопредѣленіе, вслѣдствіе его несогласимости съ свободой воли. Когда двѣ идеи или два факта вполнѣ установлены, каждый въ отдѣльности, то не разумнѣе ли признать ихъ оба, даже если бы сосуществованіе ихъ и не было объяснено? Противорѣчіе, которое, какъ будто, мы въ нихъ замѣчаемъ, можетъ зависѣть отъ нашего недостатка знанія или же отъ того, что нашъ умъ не въ состояніи подняться до высшей истины, содержащей въ себѣ и объединяющей обѣ другія. Единственная антиномія, о которой мы вправѣ говорить это—та, которая возникаетъ въ чисто логическомъ порядкѣ,

---

цаніе, согласное съ его формой и называемое *абсолютнымъ пространствомъ*, представляетъ собою простую возможность внѣшнихъ явленій, поскольку они могутъ существовать сами по себѣ, или въ связи съ другими данными явленіями. Эмпирическое созерцаніе не состоитъ, слѣдовательно, изъ явленій и пространства (изъ воспріятія и безпредметнаго созерцанія). Одно, слѣдовательно, не является синтетическимъ коррелятивомъ другого, но просто одно лишь соединено съ другимъ въ общемъ эмпирическомъ созерцаніи, какъ матерія и форма этого созерцанія. Если бы мы хотѣли помѣстить одинъ изъ этихъ элементовъ наружнаго познаванія внѣ другого (пространство внѣ всѣхъ явленій), то вслѣдствіе этого произошли бы всѣ роды безполезныхъ опредѣленій внѣшняго созерцанія, которыя, однако, не будутъ возможными воспріятіями; напримѣръ, мiровое движеніе или покой въ безконечномъ пустомъ пространствѣ, опредѣленіе отношенія между двумя вещами, которое никогда не можетъ быть предметомъ воспріятія и потому служитъ предикатомъ чисто идеальнаго бытія“.

гдѣ одно изъ двухъ утвержденій требуетъ непремѣнно, чтобы другое было отброшено. Когда мы разсуждаемъ о *цѣломъ* или о *части*, о *прямой* линіи или о линіи *кривой*, о *конечномъ* или о *безконечномъ*, то одна изъ двухъ альтернативъ по необходимости исключаетъ другую, такъ какъ одна и та же реальность не можетъ явиться разомъ въ этихъ двухъ видахъ. Математика часто пользуется этимъ принципомъ, на которомъ основанъ даже способъ доказательства, называемый *приведеніемъ къ абсурду*. Но какъ только мы проникаемъ въ область физики, какъ только мы хотимъ разсуждать о матеріи, о пространствѣ, о созданіи міра, намъ слѣдуетъ быть чрезвычайно осмотрительными въ нашихъ заявленіяхъ о несовмѣстности фактовъ или явленій.

ПРИМѢЧАНІЕ II.

О безконечности вселенной.

Безконечность вселенной вовсе не представляется необходимой. Разумъ намъ ничего не говоритъ о ней. Представленія древнихъ, какъ я уже имѣлъ случай указывать на это, стремились скорѣе приписать ей довольно ограниченные размѣры.

Чтобы доказать конечный или безконечный характеръ міра, уже съ давнихъ поръ прибѣгали къ аргументамъ схоластическимъ или религіознымъ, которыя могутъ быть вкратцѣ выражены въ слѣдующей формѣ.

«Предполагать міръ ограниченнымъ, значитъ унижать величіе Творца, значитъ давать весьма слабое представленіе о его могуществѣ, значитъ становиться въ противорѣчіе съ тѣми самыми свойствами, которыя мы ему приписываемъ», говорятъ одни. Или: «Нѣтъ причины, чтобы вселенная занимала одно мѣсто въ пространствѣ предпочтительно передъ другимъ. Слѣдовательно, она должна занимать все пространство и быть такъ же безконечной, какъ и пространство».

«Если міръ безконеченъ, возражали другіе, то онъ и необходимъ; а будучи необходимымъ, онъ всегда существовалъ. Поэтому у него не было творца; слѣдовательно величіе божіе требуетъ, чтобы міръ былъ ограниченъ». Нѣкоторые же прибавляли: «Всякое созданіе ниже своего Творца;

слѣдовательно, міръ не безконеченъ, точно такъ, какъ онъ не совершенъ, не изъятъ отъ зла и т. д.».

Мало-по малу отказались отъ этой аргументаціи, заставлявшей вопросъ вращаться въ безвыходномъ кругѣ, и обратились къ естественнымъ наукамъ.

Эти послѣднія, несмотря на свое превосходство сравнительно со схоластикой, не могутъ дать формальнаго рѣшенія. Безконечность вселенной, если она дѣйствительно существуетъ, не доступна непосредственному наблюденію. Взоръ нашъ охватываетъ всегда лишь болѣе или менѣе обширныя пространства. Между тѣмъ, вселенная, обладающая весьма большими, хотя и ограниченными размѣрами, можетъ имѣть въ нашихъ глазахъ видъ безконечной вселенной, и мы не имѣемъ никакого средства провѣрить это впечатлѣніе. Наоборотъ, вселенная безконечная можетъ имѣть видимость ограниченной, потому что нѣкоторыя части ея могутъ быть такъ удалены, что окажутся совершенно незамѣтными для нашихъ наблюденій, на основаніи которыхъ однихъ мы и составляемъ наши понятія.

Вопросъ грозитъ оставаться вѣчно неразрѣшимымъ. Самое большее, на что мы можемъ разсчитывать, это—доказать вѣроятность утвердительнаго или отрицательнаго отвѣта. Но въ которую сторону склоняется эта вѣроятность? Что болѣе вѣрно,на основаніи указаній, собранныхъ современной наукой, —предположить ли безконечность матеріальной вселенной, или признать ее ограниченность?

Великій астрономъ Франсуа Араго поставилъ вопросъ въ слѣдующей формѣ: „Конечно-ли или безконечно число звѣздъ?“ Придерживаясь второго предположенія,—по причинамъ, которыхъ онъ не объясняетъ Араго старался согласить его съ видомъ неба и съ данными физики. Вотъ его слова:

«Если число звѣздъ безконечно, какъ все заставляетъ насъ думать, то нѣтъ ни одного луча зрѣнія, проходящаго отъ земли къ звѣзднымъ пространствамъ, который не встрѣчалъ бы, по крайней мѣрѣ, одно изъ этихъ свѣтилъ *). Какъ бы ни была мала ихъ поверхность, звѣзды произведутъ, вслѣдствіе непрерывности ихъ проэкцій на небесномъ сводѣ видъ свѣтовой оболочки безъ всякой темной части. Промежутокъ между двумя составляющими эту сферу звѣздами, находя-

*) Обратное заключеніе несправедливо. Хотя бы даже каждый изъ зрительныхъ лучей встрѣчалъ на своемъ пути звѣзду, мы были бы не вправѣ заключить отсюда, что число этихъ свѣтилъ безконечно. Мы могли бы только сказать, что оно очень велико.

щимися въ нѣкоторомъ удаленіи одна отъ другой, будетъ заполненъ звѣздой, находящейся иногда на безконечно большомъ разстояніи; это не помѣшаетъ интенсивности явленій производитъ такое впечатлѣніе, какъ будто всѣ звѣзды были прикрѣплены къ сферическому своду на одномъ и и томъ же разстояніи отъ наблюдателя. Интенсивность этого свода была бы повсюду одинакова, если бы всѣ образующія его звѣзды имѣли бы одинаковый блескъ *). Предполагая, что блескъ каждой звѣзды равняется блеску солнца,—предположеніе довольно естественное, потому что солнце есть, дѣйствительно звѣзда,—мы увидимъ, что всякая часть неба, видимая подъ угломъ зрѣнія, равнымъ приблизительно 32′, послала бы намъ количество свѣта, одинаковое съ получаемымъ нами отъ солнца. Въ дѣйствительности же дѣло происходитъ совершенно иначе. Какъ объяснить себѣ это, не отказавшись отъ мысли о безконечномъ пространствѣ, во всѣхъ направленіяхъ усѣянномъ звѣздами!“

Казалось бы, отсюда слѣдовало заключить, что количество звѣздъ ограничено, но Араго, принявшій, какъ я сказалъ, другую точку зрѣнія, продолжаетъ слѣдующимъ образомъ:

„Съ трудомъ можно понять, что у двухъ названныхъ мною ученыхъ (Ольберсъ и Шезо изъ Лозанны, занимавшіеся раньше тѣмъ же самымъ вопросомъ), ни у того, ни у другого не явилось мысли о существованіи между безчисленнымъ множествомъ звѣздъ, которыми, какъ они полагаютъ, усѣяно звѣздное пространство, громаднаго числа совершенно

*) Этотъ кажущійся парадоксъ не можетъ удивить тѣхъ, кто хоть сколько-нибудь знакомъ съ законами оптики. Онъ является прямымъ слѣдствіемъ того принципа, по которому свѣтъ, вытекающій изъ свѣтящейся точки ослабѣваетъ пропорціонально квадратамъ разстояній. Но если вмѣсто того, чтобы вытекать изъ свѣтящейся *точки* свѣтъ исходилъ изъ свѣтящейся поверхности, *имѣющей протяженіе,* то впечатлѣніе, произведенное имъ на глазъ наблюдателя, совершенно иное. Въ самомъ дѣлѣ, предположимъ на столько большую свѣтящуюся поверхность, чтобы конусъ, образуемый зрительными лучами, со всякаго разстоянія встрѣчалъ ее повсюду, нигдѣ не выходя за ея края. Увеличеніе разстоянія въ этомъ случаѣ не будетъ имѣть другого результата, кромѣ того, что конусъ своей поверхностью будетъ вырѣзывать изъ свѣтящейся сферы все большія и большія части, размѣры которыхъ станутъ возрастать въ точной пропорціи къ квадратамъ разстояній. А мы только что сказали, что свѣтъ, испускаемый каждой точкой, ослабѣваетъ въ той же самой пропорціи; слѣдовательно, здѣсь произойдетъ полная компенсація между ослабленіемъ и числомъ свѣтящихся точекъ, такъ что свѣтъ, исходящій изъ основанія конуса, сохранитъ для наблюдателя всегда одну и ту же напряженность.

темныхъ и непрозрачныхъ. Это простое замѣчаніе, мнѣ кажется, въ основѣ опровергаетъ ихъ вычисленія и сводитъ къ нулю сдѣланные ими выводы. Развѣ не очевидно, что совокупность всѣхъ этихъ темныхъ и непрозрачныхъ звѣздъ должна образовать нѣчто въ родѣ оболочки, за предѣламъ которой ничто не можетъ быть видимо, такъ какъ лучи свѣта, идущіе отъ звѣздъ, находящихся за ней, встрѣтилъ бы на своемъ пути родъ экрана, который и остановилъ бы ихъ“ *).

Не легко принять это объясненіе, несмотря на авторитетъ Араго. Оно не только не согласуется съ совокупностью идей, господствующихъ въ космогоніи, но и плохо объясняетъ очень неодинаковое распредѣленіе свѣтящихся небесныхъ тѣлъ. Почему въ однѣхъ областяхъ неба передъ этими звѣздами будутъ находиться темныя тѣла въ большемъ изобиліи, чѣмъ въ другихъ? Чѣмъ объясняется этотъ контрастъ между частями неба до такой степени темными и лишенными звѣздъ, что онѣ у моряковъ и астрономовъ получили характерное названіе *угольныхъ мѣшковъ* (*sacs à charbon*), и частями, до того густо покрытыми звѣздами и блестящими, что ихъ долгое время принимали за космическую матерію, находящуюся на пути къ сгущенію?

Темныя небесныя тѣла, причина этихъ неправильностей неба, согласно изложенному воззрѣнію, не являются, впрочемъ, второстепенными тѣлами, подобными планетамъ и ихъ спутникамъ, потому что, иначе, ихъ размѣры не соотвѣтствовали бы такимъ явленіямъ сокрытія звѣздъ; но онѣ должны представлять собою, какъ Араго прямо указываетъ, настоящія потухшія солнца. Какъ представить себѣ два продукта творенія, столь тѣсно переплетенные другъ съ другомъ, причемъ, въ одномъ изъ нихъ жизнь уже изсякла, а другой находится въ полномъ разцвѣтѣ своихъ силъ? Почему могли бы они возникнуть въ одной и той же области пространства въ двѣ столь различныя эпохи? И если бы мы предположили, что потухшія звѣзды были просто наиболѣе древними изъ всѣхъ, то почему встрѣчается такъ мало красноватыхъ звѣздъ или находящихся на пути къ потуханію. Мы должны были бы заключить какъ разъ обратное.

Съ другой стороны, такъ какъ звѣзды не неподвижны и ихъ перемѣщенія съ теченіемъ времени становятся замѣт-

*) Astronomie populaire, t. 1-er p. 383. Популярная Астрономія Араго.

ными, то взаимныя положенія темныхъ небесныхъ тѣлъ и свѣтящихся должны были бы измѣняться безпрестанно, а потому мы могли бы быть свидѣтелями появленій и исчезновеній звѣздъ. Между тѣмъ этого рода факты рѣдки и плохо согласуются съ дѣйствіемъ общаго закона, которому подчиняются всѣ небесныя явленія. Новыя звѣзды быстро измѣняли свой блескъ, многія изъ нихъ даже вдругъ исчезли и оставили у наблюдателя скорѣе идею о внезапномъ возникновеніи, чѣмъ о прерываемомъ сокрытіи звѣздъ темнымъ тѣломъ.

Два другихъ объясненія были предложены въ подтвержденіе кажущагося вида неба—и все въ предположеніи, что вселенная безконечна.

Первое объясненіе состоитъ въ допущеніи существованія междузвѣздной среды, которая, при достаточной толщинѣ, поглощаетъ свѣтовые лучи. Но Араго, какъ мы видѣли, отвергаетъ это объясненіе и считаетъ необходимымъ замѣнить его,—до такой степени оно кажется ему лишеннымъ основанія. Въ самомъ дѣлѣ, что это за междузвѣздная среда, не вполнѣ прозрачная? Будетъ ли это очень рѣдкая космическая матерія, избѣжавшая общаго сгущенія, отъ котораго произошли наши свѣтила? Но если и можно допустить ее, собственно говоря, въ сосѣдствѣ самихъ свѣтилъ, напримѣръ, внутри нашей солнечной системы—гдѣ, впрочемъ, присутствіе ея ничѣмъ не доказано—то уже совершенно нельзя объяснить себѣ ея существованіе въ громадныхъ пустыняхъ, простирающихся между послѣдними изъ видимыхъ свѣтилъ и тѣми, гораздо болѣе далекими отъ насъ, которыхъ свѣтъ задерживается такимъ образомъ на пути. Впрочемъ, за отсутствіемъ такой загадочной среды, нельзя ли объяснить явленія поглощенія свѣта эфиромъ? Но чрезвычайно трудно предположить, чтобы механизмъ, служащій для передачи свѣта, могъ сдѣлаться въ то же время средой, препятствующей этому. Тяготѣніе, которое, въ свою очередь, передается при помощи подобнаго же механизма—хотя, какъ полагаютъ, несравненно быстрѣе—вовсе не кажется ослабѣвающимъ, потому что—какое бы разстояніе ни было—самыя точныя наблюденія всегда остаются въ согласіи съ законами Ньютона. Существуетъ безконечная вѣроятность въ пользу того, что передача свѣта, законъ уменьшенія напряженности котораго тотъ же самый, не менѣе обезпечена, какъ и дѣйствіе тяготѣнія. Свѣтовые лучи, исходящіе отъ самыхъ отдаленныхъ свѣтилъ, не встрѣчаютъ, слѣдовательно, другихъ пре-

пятствій, кромѣ тѣхъ, которыя существуютъ въ ихъ атмосферѣ и въ солнечной системѣ. Здѣсь должна быть нѣкоторая *постоянная*, оказывающая вліяніе на свѣтъ всѣхъ свѣтилъ безъ исключенія, не зависящая отъ разстоянія между ними и землей.

При второмъ объясненіи также ссылаются на разстояніе. Большая часть звѣздъ находится, согласно этому объясненію, на такомъ громадномъ разстояніи отъ насъ, что свѣтъ отъ нихъ не успѣлъ еще достигнуть до поверхности земли. Эта гипотеза, не имѣющая въ себѣ, повидимому, ничего невозможнаго, все-таки, весьма мало гармонируетъ съ тѣмъ, что намъ извѣстно въ области звѣздной астрономіи. На основаніи послѣднихъ открытій, самыя удаленныя отъ земли звѣзды, принадлежащія къ скопленію, часть котораго мы образуемъ, тѣ, которыя находятся на границахъ млечнаго пути, употребляютъ около пятнадцати тысячъ лѣтъ для того, чтобы переслать намъ свои лучи *). Съ другой стороны, физики, защищающіе теорію сгущенія туманностей, какъ Гельмгольцъ и Вильямъ Томсонъ, приписываютъ солнечной системѣ возрастъ отъ пятнадцати до двадцати милліоновъ лѣтъ. Геологи, какъ мы сказали, идутъ дальше этого предѣла и требуютъ періода значительно большаго. Самые умѣренные изъ нихъ не понижаютъ своихъ требованій ниже чѣмъ до двадцати милліоновъ лѣтъ.

Эти цифры, конечно, вовсе не претендуютъ на точность во мнѣніи ихъ авторовъ; но, все-таки, онѣ позволяютъ сдѣлать нѣкоторыя сопоставленія.

Если самая удаленная изъ видимыхъ въ настоящее время звѣздъ находится отъ насъ на разстояніи пятнадцати тысячъ лѣтъ —да извинятъ мнѣ это выраженіе—и если возрастъ земли можно считать самое меньшее въ пятнадцать милліоновъ лѣтъ, то отсюда слѣдуетъ, что свѣтящійся сводъ, блескъ котораго не достигъ еще до насъ, находится на разстояніи въ тысячу разъ большемъ отъ земли, чѣмъ послѣдняя изъ звѣздъ нашего звѣзднаго скопленія. Какимъ

---

*) См. уже приведенную книгу Фэя *Sur l'origine du monde*, 2-е изданіе, стр. 181. Ученый астрономъ опредѣляетъ въ тридцать тысячъ лѣтъ время, необходимое для того, чтобы лучъ свѣта пробѣжалъ отъ одного края млечнаго пути до другого въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ имѣетъ наибольшіе размѣры. Въ центрѣ млечнаго пути находится солнечная система.

См. также *Le Soleil* Секки. Опредѣленіе, указанное во II томѣ этой книги на стр. 474, аналогично оцѣнкѣ Фэя.

образомъ объяснить себѣ такую огромную пустоту между нашимъ скопленіемъ звѣздъ и ближайшимъ къ нему, особенно если вспомнить, что среднее удаленіе тридцати милліоновъ извѣстныхъ звѣздъ соотвѣтствуетъ только приблизительно пятнадцати тысячамъ лѣтъ? Такимъ образомъ, разстояніе между послѣдней звѣздой видимой вселенной и звѣздами еще невидимыми было бы въ милліонъ разъ значительнѣе средняго разстоянія извѣстныхъ звѣздъ. Такая непропорціональность въ общемъ планѣ природы кажется мало вѣроятной *).

Трудности исчезаютъ, если рѣшиться предположить, что число звѣздъ въ дѣйствительности ограничено.

Буссинэскъ (Boussinesq) сдѣлалъ одно замѣчаніе, которое, повидимому, оправдываетъ такое заключеніе. „Въ самомъ дѣлѣ, извѣстно, говоритъ онъ, что законъ Ньютона приписываетъ двумъ матеріальнымъ слоямъ одинаковой плотности равныя притяженія, производимыя ими на данный атомъ, въ томъ случаѣ, когда они кажутся съ этого атома имѣющими одинаковую поверхность и когда, кромѣ того, они обладаютъ одинаковой толщиной по направленію идущихъ такимъ образомъ лучей зрѣнія. Этотъ законъ, слѣдовательно, не можетъ заставить стремиться къ нулю, или, по крайней мѣрѣ къ конечному предѣлу притяженіе, испытываемое атомомъ въ нѣкоторомъ направленіи, со стороны очень удаленной матеріи, находящейся внутри весьма малаго тѣлеснаго угла, вершиной котораго является атомъ, а между ребрами проходитъ разсматриваемое направленіе, такъ какъ эта матерія можетъ быть разложена поперечными сѣченіями на безграничное число слоевъ конечной толщины и однихъ и тѣхъ же кажущихся размѣровъ *)“.

Въ сущности, притяженіе въ какой-нибудь точкѣ пространства не равно безконечности; оно относительно слабо.

---

*) Безъ сомнѣнія, могутъ обратить наше вниманіе на то, что на разстояніяхъ даже гораздо меньшихъ, чѣмъ только-что указанное, могутъ встрѣтиться звѣзды, свѣта которыхъ мы не замѣчаемъ, не потому чтобы онъ не достигъ еще до насъ, а вслѣдствіе того, что въ силу своего удаленія онъ не производитъ на наши органы достаточно сильнаго впечатлѣнія. Это возможно для отдѣльныхъ звѣздъ или для небольшихъ группъ, блескъ которыхъ и въ самомъ дѣлѣ ослабѣваетъ въ пропорціи къ квадрату разстоянія, но это не будетъ вѣрно относительно непрерывной свѣтовой поверхности, въ родѣ той, что, согласно мнѣнію Араго, явилась бы результатомъ безчисленнаго множества звѣздъ.

*) Etude sur divers points de la Philosophie des Sciences, par M. J. Boussinesq, membre de l'Académie des Sciences; page 81.

Слѣдовательно, необходимо предположить, что или общее количество матеріи ограничено, или при разстояніи, превышающемъ извѣстный предѣлъ, законъ Ньютона перестаетъ быть точнымъ. Буссинэскъ, не исключая положительно первой гипотезы, высказывается въ пользу второй: „На этотъ счетъ, говоритъ онъ, я замѣчу, что если, въ самомъ дѣлѣ, никакое конкретное количество не дѣлимо до безконечности, то притяженіе, производимое на опредѣленное тѣло другимъ болѣе и болѣе удаляющимся отъ него, должно, наконецъ, послѣ возможно большого уменьшенія по закону Ньютона, сдѣлаться равнымъ нулю во всей объективной строгости, когда разстояніе между ними превзойдетъ нѣкоторый предѣлъ, величину котораго мы не въ состояніи оцѣнить. Этотъ предѣлъ и будетъ радіусомъ дѣйствія силы притяженія между двумя тѣлами: введеніе его въ вычисленіе позволило бы объяснить самымъ естественнымъ способомъ, какимъ образомъ, несмотря на громадные размѣры вселенной и доступную численному опредѣленію величину средней плотности матеріи, во всемъ ея протяженіи тяжесть (или *сила тяготѣнія*) въ каждой точкѣ пространства всегда конечна, и часто даже, повидимому, очень мала сравнительно съ дѣйствіями, происходящими на незначительныхъ разстояніяхъ, между наименьшими количествами вещества“.

Согласятся ли физики съ тѣмъ, что этотъ великій законъ всемірнаго тяготѣнія, выражающійся такъ просто, и такъ превосходно соотвѣтствующій нашимъ идеямъ на счетъ способа дѣйствія лучистыхъ силъ, законъ, котораго точность доказана въ столь многочисленныхъ и разнообразныхъ случаяхъ, перестаетъ быть вѣрнымъ, когда разстояніе между тѣлами переходитъ за извѣстный предѣлъ? Что касается астрономовъ, то ихъ довѣріе, кажется, въ этомъ отношеніи не скоро поколеблется. Всякій разъ, какъ они замѣчаютъ небольшое уклоненіе между результатами вычисленія и наблюденія, имъ и въ голову не приходитъ заподозрить формулу Ньютона; но они, не колеблясь, предполагаютъ, что ихъ измѣренія были не вполнѣ точны, или что они не приняли во вниманіе нѣкотораго посторонняго элемента, дѣйствующаго безъ ихъ вѣдома.

По правдѣ говоря, разстоянія, о которыхъ упоминаетъ Буссинэскъ, несравненно больше размѣровъ солнечной системы. Однако же, такъ какъ законъ функціонируетъ съ удивительной точностью, начиная отъ луны и оканчивая Нептуномъ, т. е., въ предѣлахъ дѣйствія, радіусъ котораго

измѣняется отъ 1 до 12.000, то если уклоненія обнаруживаются потомъ, на большемъ разстояніи, это имѣетъ видъ, какъ если бы линія, идя все прямо, на громадномъ разстояніи, дѣлалась кривой въ дальнѣйшемъ своемъ развитіи. Понятно, что законъ утрачиваетъ свою точность или по крайней мѣрѣ кажется, что перестаетъ быть точнымъ, въ томъ случаѣ, если тѣла сближаются между собою до взаимнаго прикосновенія. Потому что тогда между частицами матеріи могутъ развиваться новыя силы, которыя прикладываются къ тяготѣнію въ собственномъ смыслѣ и замаскировываютъ его дѣйствія. Но откуда могли бы произойти эти силы, когда, напротивъ, тѣла еще больше удалятся одно отъ другого?

Можно ли здѣсь приложить аргументъ, вытекающій изъ невозможности безконечнаго дѣленія конкретныхъ величинъ? Въ этомъ случаѣ дѣло идетъ, какъ это очевидно, не о томъ, чтобы подраздѣлять силу, раздѣляя тѣло, отъ котораго она происходитъ; потому что въ этомъ случаѣ дѣленіе силы остановилось бы по необходимости тамъ, гдѣ останавливается дѣленіе матеріи. Но дѣло идетъ объ уменьшеніи ея напряженія путемъ увеличенія разстоянія, что имѣетъ весьма большую аналогію съ безконечнымъ дѣленіемъ геометрическихъ протяженій.

Что же касается слабости всемірнаго тяготѣнія, то, несмотря на громадное количество окружающей насъ матеріи, ее можно объяснить себѣ совершенно естественно, если вселенная имѣетъ границы. Потому что притяженіе, производимое ею на земной шаръ, будетъ того же порядка, что и количество посылаемаго ею намъ свѣта. Какъ то, такъ и другое, повинуются закону уменьшенія пропорціонально квадратамъ разстоянія. Но, вслѣдствіе своего громаднаго разстоянія, тридцать милліоновъ звѣздъ, наблюдаемыхъ при помощи телескопа, равнозначны только 320 звѣздамъ первой величины. Еще болѣе удаленныя отъ земли звѣзды, свѣтъ которыхъ не производитъ на насъ впечатлѣнія, оказываютъ ничтожное притяженіе по той же причинѣ.

Современная космогонія склоняется къ тому же. По теоріи Лапласа обобщенной въ настоящее время, пространство было въ нѣкоторую эпоху наполнено необыкновенно рѣдкой и тонкой матеріей, содержащей въ состояніи диссоціаціи и диффузіи всѣ элементы будущихъ міровъ. Въ этой средѣ, подчиненной закону всемірнаго тяготѣнія, и подъ вліяніемъ условій, о которыхъ я скажу тотчасъ же нѣсколько

словъ, должны были медленно образоваться центры притяженія. Матерія собралась мало-по-малу вокругъ этихъ центровъ и такимъ образомъ обозначилось въ общемъ хаосѣ чередованіе частей болѣе наполненныхъ и пространствъ, гдѣ начала образовываться пустота.

Таковы были, согласно этой теоріи, первыя очертанія различныхъ солнечныхъ системъ. Каждая изъ нихъ, въ свою очередь, находясь еще въ состояніи туманности, была театромъ аналогичной внутренней работы. Лапласъ показываетъ, какъ центральное свѣтило все болѣе и болѣе сгущалось, причемъ отъ него постепенно отдѣлялись планеты при помощи образованія концентрическихъ колецъ (подобныхъ кольцамъ Сатурна), которыя должны были разрываться и сгущаться въ сферическія массы. Этотъ послѣдній пунктъ особенно трудно выяснить себѣ. Тѣмъ не менѣе, эта теорія, кромѣ нѣкоторыхъ подробностей, принята большинствомъ астрономовъ.

Однимъ тяготѣніемъ нельзя объяснить себѣ этихъ явленій. Если бы первоначальный хаосъ находился въ покоѣ, то свѣтила, образовавшіяся изъ него помощію сгущенія, были бы такъ же неподвижны. „Матеріалы (вселенной), говоритъ Фэй, испытывая взаимное притяженіе, съ самаго начала находились въ различнаго рода движеніи, которое заставило ихъ разорваться въ клочья, образовать тучи. Эти послѣднія сохранили быстрое поступательное движеніе и чрезвычайно медленное внутреннее вращеніе. Миріады такихъ хаотическихъ обрывковъ послужили, путемъ прогрессивнаго сгущенія, для образованія различныхъ міровъ вселенной“.

Кромѣ того кажется — и это самое существенное соображеніе—что общее скопленіе матеріи должно было имѣть предѣлъ. По крайней мѣрѣ, съ большимъ трудомъ можно представить себѣ сгущеніе, происходящее въ такой средѣ, гдѣ силы дѣйствуютъ по всѣмъ направленіямъ на безконечно большія разстоянія. „Центръ безконечности повсюду“, говоритъ Паскаль, а это исключаетъ мысль о нарушеніи равновѣсія въ одной точкѣ предпочтительно передъ другой. Дѣйствительный прерывъ внушаетъ предположеніе о первоначальной ограниченности.

Для астрономовъ матеріальная вселенная, по крайней мѣрѣ, вселенная, доступная нашимъ наблюденіямъ, сводится, или почти сводится, къ громадной группировкѣ созвѣздій Млечнаго пути. Это единственное и чудное созвѣздіе, предметъ поэтическихъ вдохновеній древнихъ, имѣетъ прибли-

зительно чечевицеобразную форму. Толщина его очень мала въ сравненіи съ прочими размѣрами. Помѣщаясь у центра этого скопленія, мы замѣчаемъ мало звѣздъ, когда смотримъ въ направленіи толщины и гораздо большее ихъ число, когда устремляемъ нашъ взоръ по направленію плоскости. Такимъ образомъ объясняется различіе въ видѣ неба, столь блестящаго на окружности млечнаго пути и столь темнаго внутри.

Прогрессъ въ устройствѣ астрономическихъ инструментовъ позволяетъ ежедневно открывать новыя звѣзды или разлагать въ звѣзды такія туманности, которыя считались прежде состоящими изъ космическаго вещества. Эти открытія происходятъ преимущественно въ областяхъ, находящихся въ направленіи плоскости млечнаго пути, а слѣдовательно, какъ бы имѣютъ связь съ этимъ созвѣздіемъ. Если бы новыя свѣтила принадлежали къ постороннимъ образованіямъ, то ихъ пришлось бы, скорѣе, наблюдать въ направленіи толщины, гдѣ находится болѣе тонкій слой звѣздъ.

Вотъ указанія, важности которыхъ не слѣдуетъ преувеличивать. Млечный путь и самъ не составляетъ строго ограниченнаго цѣлаго съ правильно расположенными частями. „Если разсматривать, говоритъ Фэй, неправильную форму этой свѣтящейся зоны, ея прерывы, частичное раздѣленіе ея на двѣ различныя вѣтви, или даже на отдѣльныя скопленія звѣздъ, изъ которыхъ нѣкоторыя, какъ, напримѣръ, тучи Магеллана, очень далеко отброшены отъ общей плоскости, пространства, гдѣ вовсе нѣтъ звѣздъ или совершенно черныя пятна, которымъ моряки дали характерное названіе „*sacs à charbon*“ т. е., угольные мѣшки, то приходишь къ заключенію, что Млечный путь представляетъ больше аналогіи съ обширнымъ кольцомъ, находящимся на пути къ разложенію въ клочья, чѣмъ съ плоскимъ и однороднымъ слоемъ звѣздъ и туманностей“. (Стр. 214 указаннаго уже труда).

Какъ бы ни были неопредѣленны соображенія, основанныя на формѣ Млечнаго пути, ими, однако же, нельзя пренебречь. Взятыя въ отдѣльности, они, конечно, представляютъ собою весьма слабое доказательство ограниченности вселенной, но вмѣстѣ съ другими указаніями получаютъ дѣйствительное значеніе. Изъ совокупности всего этого, по моему мнѣнію, вытекаетъ довольно серьезное предположеніе. Во всякомъ случаѣ, противное положеніе не основывается ни на какомъ научномъ доводѣ. Оно преиму-

щественно дѣйствуетъ на воображеніе и служитъ удовлетворенію религіозныхъ душъ, которыя отказываются признать границы божественнаго творенія. Да и здѣсь еще является вопросъ—дѣйствительно ли религіозное міропониманіе нуждается въ признаніи безконечности вселенной. Не будетъ ли одинаково благочестиво думать, вмѣстѣ съ Иммануиломъ Кантомъ, что твореніе не останавливается, и что Всемогущій оставилъ для себя безконечное время, чтобы населить безконечное пространство?

ПРИМѢЧАНІЕ III.

По поводу одного аргумента въ пользу детерминизма.

Я хочу разсмотрѣть здѣсь нѣсколько подробнѣе вопросъ, задѣтый мною вскользь въ одной изъ предыдущихъ главъ. Вслѣдствіе своего смѣшаннаго характера онъ занималъ собою знаменитыхъ геометровъ Сенъ-Венана, Курно, Буссинэска (Saint-Venant, Cournot, Boussinesq). Эти ученые вознамѣрились согласить сохраненіе динамической энергіи съ возможностью для человѣка акта иниціативы и свободной воли, другими словами, они захотѣли показать, что вмѣшательство человѣка можетъ быть совершенно свободно, не вызывая никакого созданія энергіи или движенія.

Сенъ-Венанъ и Курно приступили къ рѣшенію этой задачи въ сущности довольно сходно и пришли къ заключенію, что иниціатива живого существа не создаетъ движенія, а, въ концѣ концовъ, сводится къ „направляющей способности“ или къ „освобождающей силѣ“, состоящей въ томъ, чтобы дать почти безконечно малый импульсъ, отъ котораго зависитъ все остальное дѣйствіе. Мы, такимъ образомъ, встрѣтились бы съ механизмомъ, похожимъ на хорошо регулированную машину, гдѣ, чтобы привести въ дѣйствіе большую силу, достаточно обрѣзать тонкую нить, удерживающую первую пружину или надавить пуговку, замыкающую электрическій токъ.

Но первое замѣчаніе, приходящее въ голову, таково: какъ бы ни была слаба въ подобномъ случаѣ работа человѣка, она, все-таки, строго говоря, не равна нулю. Слѣдовательно, нельзя сказать, чтобы дѣйствіе воли было совер-

шенно свободно отъ всякой созидательной работы въ собственномъ смыслѣ слова.

Буссинэскъ постарался предупредить это возраженіе. Въ одномъ замѣчательномъ мемуарѣ, обратившемъ на себя вниманіе Академіи нравственныхъ и политическихъ наукъ *), онъ напоминаетъ, что различныя задачи динамики представляютъ, съ точки зрѣнія вычисленія, настоящую неопредѣленность. Соотвѣтствующія имъ уравненія имѣютъ „особенныя рѣшенія"; на основаніи формулъ движеніе въ нѣкоторые моменты можетъ происходить безразлично въ нѣсколькихъ направленіяхъ. Кривыя, представляющія внутреннюю дѣятельность—если предположить ихъ начерченными—находились бы именно въ этихъ условіяхъ. Ихъ уравненія представляли бы время отъ времени, или даже постоянно, нѣсколько рѣшеній. „Направляющая способность", производимая человѣческой душой, не потребовала бы, поэтому, никакого расхода силы. Она ограничилась бы лишь исключеніемъ нѣкоторыхъ рѣшеній въ пользу какого-нибудь одного изъ нихъ. „Одушевленное существо, говоритъ Буссинэскъ (стр. 40), было бы, слѣдовательно, тѣмъ, уравненія движенія котораго допускали бы особенные интегралы, вызывающіе черезъ очень близкіе между собою промежутки, или даже совершенно непрерывнымъ образомъ вмѣшательство спеціальнаго *направляющаго начала* вслѣдствіе производимой ими неопредѣленности. Этотъ направляющій принципъ, весьма различный отъ жизненнаго принципа древнихъ философскихъ школъ, не имѣлъ бы въ своемъ распоряженіи никакой механической силы, которая дала бы ему возможность бороться противъ силъ, могущихъ встрѣтиться ему въ мірѣ; онъ воспользовался бы только ихъ недостаточностью въ разсматриваемыхъ здѣсь особенныхъ случаяхъ, для того, чтобы произвести вліяніе на послѣдовательность явленій. Безсознательный въ началѣ индивидуальнаго существованія и даже всегда и во всемъ относящемся къ растительной жизни, но тѣмъ болѣе послушный высшему или экстра-физическому закону, который еще пока намъ не извѣстенъ, онъ осуществилъ бы, по своему, въ каждомъ животномъ, въ каждомъ растеніи специфическій, передавае-

---

*) *Conciliation du véritable déterminisme mecanique avec l'existence de la vie et la liberte morale*, par M. J. Boussinesq, membre de l'Académie des Sciences, avec préface de M. Paul Janet, membre de l'Académie des Sciences morales et politiques.

мый наслѣдственно типъ, пользуясь для этого матеріалами, заимствованными у минеральной среды или у другихъ организмовъ. Достигнувъ затѣмъ у человѣка и высшихъ животныхъ довольно высокой степени развитія и пріобрѣтя въ достаточной степени тонкіе органы, т. е., нервную систему, онъ дѣлается чувствительнымъ къ нѣкоторымъ отношеніямъ между этими органами и остальными частями своего тѣла, а также съ внѣшнимъ міромъ, пробуждаясь при взаимномъ ихъ столкновеніи и научаясь, такимъ образомъ, сознательно управлять физической силой для того, чтобы заставить ее служить выполненію заранѣе обдуманнаго плана“.

Я не послѣдую за авторомъ въ его примѣненіяхъ высшаго анализа, которыми онъ освѣщаетъ свой тезисъ. Я попробую представить рѣшеніе этого вопроса въ болѣе простыхъ выраженіяхъ.

Экспериментальный принципъ, на который ссылаются детерминисты, даже будучи принятъ во всей его строгости требуетъ признать единственно лишь, что одушевленное существо не можетъ создать движенія; но онъ не запрещаетъ ему пользоваться существовавшими раньше энергіями. Принципъ, слѣдовательно, не будетъ нарушенъ, если во всѣхъ своихъ актахъ, въ томъ даже, посредствомъ котораго онъ производитъ выборъ, человѣкъ осуществляетъ точное равновѣсіе между возникшими, такимъ образомъ, внѣшними энергіями и работой, которая исходитъ отъ него, какъ отъ источника, чтобы кажущимся образомъ увеличить міровой запасъ ея. Ничего не производя вновь, человѣкъ можетъ быть одаренъ только способностью превращать энергіи однѣ въ другія и точно возвращать, подъ различными формами, количества, полученныя имъ самимъ и служившія для общаго развитія его дѣятельности. Нѣтъ сомнѣнія, однако, что дѣло именно такъ и происходитъ.

Разсмотримъ, напримѣръ, человѣка, который долженъ толкать грузъ. Какъ только онъ прикоснется къ послѣднему, его члены напрягаются, твердѣютъ на подобіе гибкихъ частей машины. Все его тѣло становится въ своемъ родѣ натянутой пружиной, одинъ конецъ которой опирается въ землю, а другой—производитъ давленіе на грузъ. Усилія человѣка удваиваются, пружина, которую онъ изображаетъ, медленно растягивается, и предметъ подвигается впередъ. Это дѣйствіе начинается снова, и предметъ опять подвигается. Всякій разъ существуетъ соотвѣтствіе между дви-

женіемъ впередъ груза и импульсомъ, доставляемымъ человѣкомъ-пружиной. Какой же будетъ конечный результатъ? Съ одной стороны, мы видимъ массу, которая пріобрѣла скорость или преодолѣла нѣкоторое препятствіе, другими словами—образованіе энергіи. Съ другой стороны, внутренюю дѣятельность, превратившую человѣческое тѣло въ пружину и вызвавшую въ немъ усиліе, необходимое для движенія впередъ тяжести. А это усиліе, соотвѣтствующее видимому результату, развѣ оно получилось даромъ? Развѣ эта дѣятельность была создана человѣкомъ нѣкоторымъ образомъ самопроизвольно? Нѣтъ. Она была просто заимствована у природы. Человѣкъ дѣйствовалъ, двигалъ, хотѣлъ, доставилъ наконецъ энергію, переданную имъ предмету, лишь расходуя постепенно силу, аккумулированную въ немъ самомъ путемъ продолжительной работы. Эта сила быстро изсякла бы, если бы не возобновлялась безпрестанно тѣми средствами, которыя онъ извлекаетъ изъ внѣшняго міра въ формѣ питательныхъ веществъ. Онъ долженъ, по принятому выраженію, „возстановить свои силы".

Въ этомъ случаѣ человѣкъ дѣйствовалъ совершенно какъ настоящая паровая машина, гдѣ вещества уничтожаются и потребляются чтобы поддерживать энергію необходимую для ея дѣятельности. Но что справедливо относительно грубой работы чернорабочаго, то не менѣе вѣрно и для высшихъ умозрѣній человѣческой мысли. Нѣтъ ни одного умственнаго усилія, ни одной мозговой вибраціи, которыя не сопровождались бы расходомъ и не требовали бы соотвѣтствующаго заимствованія изъ запаса энергіи природы. Самая свобода и инициатива и тѣ также оплачиваются. Онѣ также вызываютъ растрату, которая должна быть возмѣщена внѣшней энергіей. Короче говоря, все, что составляетъ нравственную и умственную жизнь, точно такъ же какъ жизнь физическую, безпрестанно сопровождается расходомъ и возстановленіемъ энергіи. Свобода не прибавляетъ ничего къ общему запасу физическихъ энергій; она представляетъ собою просто частный случай ихъ превращенія.

Безъ сомнѣнія, это совершенное равновѣсіе между человѣческой дѣятельностью и заимствованіемъ, производимымъ у природы, не можетъ быть всегда обнаруживаемо съ одинаковой точностью. Не легко точно измѣрить механическую работу и расходъ, соотвѣтствующій легкимъ и скоропреходящимъ оттѣнкамъ мысли. Но достаточно, чтобы эквивалентность была ярко обнаружена въ простыхъ случаяхъ, при-

ближающихся къ промышленнымъ операціямъ, и съ другой стороны, чтобы былъ доказанъ одинъ лишь фактъ потребленія энергіи для чисто мозговой работы. Тогда разумъ выведетъ тотчасъ же отсюда возможность соглашенія между дѣйствіемъ свободы и принципомъ сохраненія всеобщей энергіи. Поэтому аргументъ детерминизма безоснователенъ. Остается лишь явленіе, болѣе или менѣе трудно поддающееся изслѣдованію, а вовсе не неразрѣшимая антиномія, требующая пожертвованія однимъ изъ двухъ находящихся на лицо терминовъ.

КОНЕЦЪ.

Объясненіе нѣкоторыхъ терминовъ, встрѣчающихся при чтеніи этой книги.

абстракція—логическій пріемъ, помощью котораго мы видѣляемъ предметъ изъ ряда другихъ, связанныхъ съ нимъ въ одно цѣлое.

абсцисса—разстояніе точки отъ опредѣленной прямой, называемой *ординатой*, или же разстояніе ея отъ опредѣленной плоскости въ томъ случаѣ, когда точка разсматривается въ пространствѣ.

аккумуляторъ—предметъ накопляющій что-либо, сгущающій.

амплитуда-уголъ, образуемый даннымъ предметомъ съ опредѣленнымъ направленіемъ.

амплитуда звѣзды—уголъ между кругомъ ея высоты и первымъ вертикаломъ даннаго мѣста, т. е. вертикальнымъ кругомъ, проходящимъ черезъ точки востока и запада.

аналитическій—относящійся къ *анализу*, т. е. къ логическому методу изслѣдованія, состоящему въ раздѣленіи явленія, факта, предмета—какъ цѣлаго—на составныя его части.

аномалія—неправильность.

антиномія—противорѣчіе между двумя законами, или двумя идеями.

аттрибутъ—неотъемлемая принадлежность предмета.

варіаціонное вычисленіе-отдѣлъ чистой математики, открытый Лагранжемъ въ 1760 году и занимающійся опредѣленіемъ наибольшаго и наименьшаго значенія интеграловъ.

генезисъ—происхожденіе, процессъ образованія.

гипербола—кривая линія, происходящая отъ пересѣченія конуса плоскостью параллельной его оси.

изолированіе удаленіе предмета изъ ряда подобныхъ ему.

импульсъ—движеніе, сообщенное одному тѣлу другимъ.

интерференція—скрещиваніе между собою результатовъ двухъ или нѣсколькихъ дѣйствій.

калорія—количество теплоты, необходимое, чтобы нагрѣть 1 килограммъ воды на 1 градусъ.

калорифическій—производящій теплоту.

компактность—сжатость тѣла.

координаты—разстоянія точки отъ абсциссы и ординаты на плоскости или, разстояніе ея отъ трехъ плоскостей координатъ въ пространствѣ или наконецъ, углы, опредѣляющіе положеніе на сферѣ даннаго радіуса. словомъ—данныя, служащія къ опредѣленію положенія точки.

коррелятивъ—то, что показываетъ взаимное отношеніе между двумя предметами.

космогонія—наука объ образованіи вселенной.

метеорическій—признакъ, свойственный метеорамъ, т. е. явленіямъ, происходящимъ въ атмосферѣ—вѣтеръ, дождь, громъ, падающія звѣзды и т. п.

нормаль—перпендикуляръ къ касательной, къ кривой въ точкѣ ея касанія.

особенный интегралъ—такое рѣшеніе дифференціальнаго уравненія, которое не можетъ быть получено изъ общаго ни при какой величинѣ произвольнаго постояннаго количества.

ось эллипса—прямая, соединяющая его полюсы, а также прямая, перпендикулярная къ ней и проходящая черезъ центръ.

ось гиперболы—то же опредѣленіе.

ось параболы—прямая, проходящая черезъ фокусъ кривой и вершину ея.

парабола—кривая, происходящая вслѣдствіе пересѣченія конуса плоскостью, параллельною производящей его.

производная—отношеніе приращенія функціи къ приращенію независимой перемѣнной въ томъ предположеніи, что послѣдняя неопредѣленно приближается къ нулю.

радіусъ векторъ—разстояніе отъ фокуса кривой до точки, находящейся на ней.

раціональный—основанный на разсужденіи.

синтезъ—способъ математическаго доказательства, основывающійся на однѣхъ только доказанныхъ теоремахъ (геометрія Эвклида)

специфицескій—исключительно свойственный чему-нибудь.

термическій—теплородный.

термодинамика—механическая теорія теплоты.

трансцендентный—сверхчувственный.

траекторія—путь, описываемый движущейся точкой.

фаза—одно изъ ряда постепенныхъ измѣненій явленія или предмета.

фиксировать—сдѣлать неподвижнымъ, упрочить.

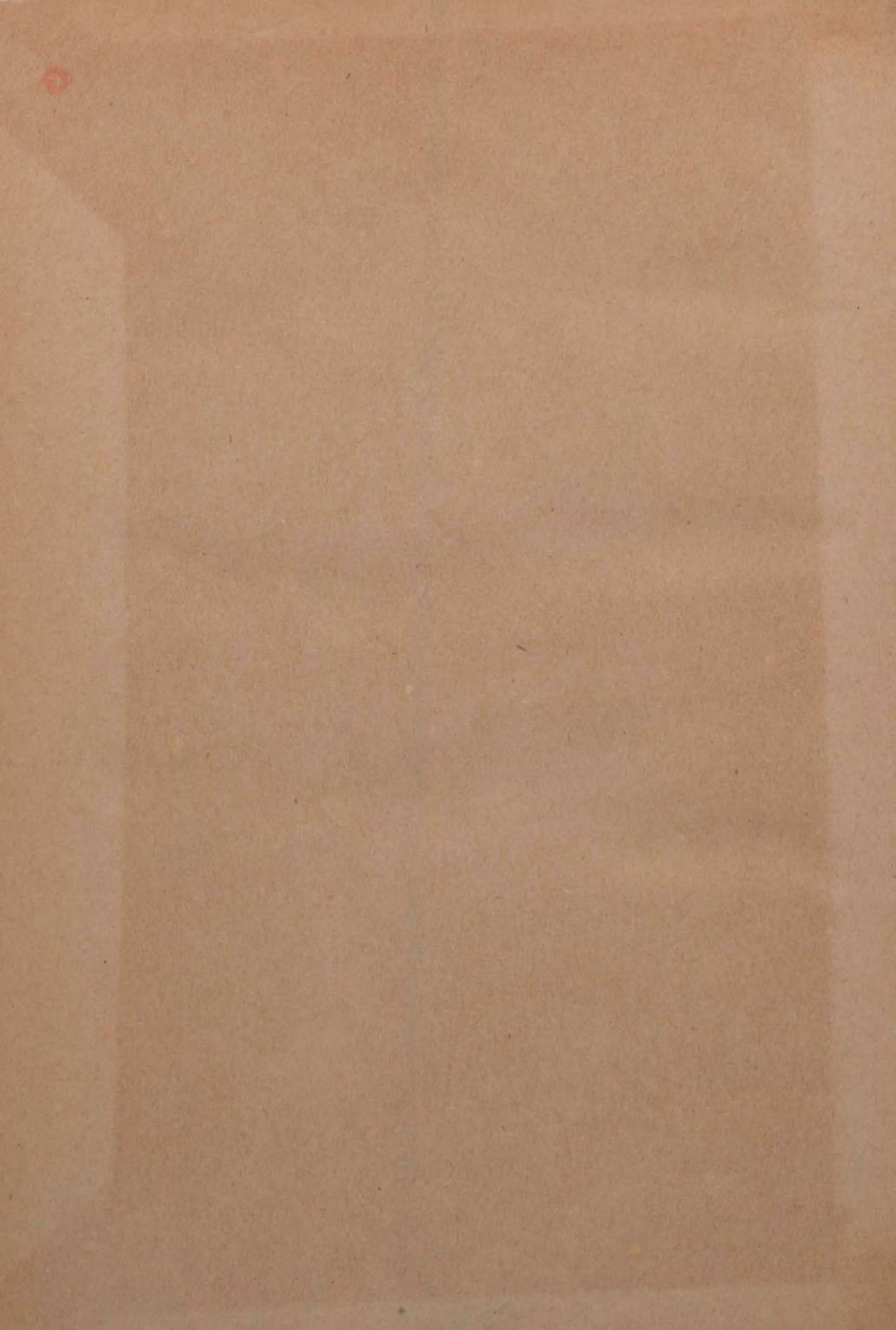
фокусъ—точка внѣ кривой, обладающая особыми свойствами по отношенію къ послѣдней. Въ эллипсѣ фокусы таковы, что сумма разстояній ихъ отъ какой-нибудь точки кривой всегда равна большей оси.

функція—величина, измѣняющаяся въ зависимости отъ другой. Въ обыденномъ языкѣ это слово обозначаетъ обязанности, возложенныя на данное лицо, отправленіе извѣстнаго органа.

функціонировать—исполнять возложенныя обязанности, производить отправленія.

эллипсъ—кривая, происходящая вслѣдствіе сѣченія конуса плоскостью, которая не параллельна ни оси, ни производящей.

экстрафизическій—находящійся за предѣлами физическаго міра.



pkí pill.


2011147114